La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 2 pages et de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1
On considère la suite u définie par $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.

1. On pose $f(x) = x + \dfrac{1+x}{1+2x}$.
   (a) Déterminer les points fixes de f.
   (b) Dresser le tableau de variation de f sur son domaine de définition.
   (c) Quel est le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$?
   (d) Vérifier que f' est décroissante sur $[-2; -1]$.
   En déduire que$\forall x \in [-2; -1]$,$0 \leq f'(x) \leq \dfrac{8}{9}$ puis que $\mid f'(x) \mid \leq \dfrac{8}{9}$.
2. On suppose dans cette question que $u_0 \in [-2; -1]$.
   (a) Montrer que $\forall n \geq 0$, u_n existe et appartient à $[-2; -1]$.
   (b) A l'aide de la question 1d, vérifier que $\mid u_{n+1} - (-1) \mid \leq \dfrac{8}{9} \mid u_n - (-1) \mid$.
   (c) En déduire que $\forall n \geq 0$, $\mid u_n - (-1) \mid \leq (\dfrac{8}{9})^n \mid u_0 - (-1) \mid$.
   (d) Quelle est la limite de la suite u?
3. On suppose dans cette question que $u_0 \geq 0$.
   (a) Montrer que $\forall n \geq 0$, u_n existe et appartient à $[0; +\infty[$.
   (b) A l'aide de la question 1c, montrer que la suite u est croissante.
   (c) Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$ (la preuve devra être très rigoureuse).

Exercice 2
On introduit la suite u définie par $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2u_n}$ avec $u_0 = 1$.

1. (a) Montrer que $\forall n \geq 0$, u_n existe et $u_n > 0$.
   (b) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+3}{2x}$. Etudier les variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

(c) Montrer que $(f \circ f)(x) = \dfrac{7x+3}{2x+6}$ et déterminer ses points fixes.

(a) Etudier la convergence de la suite $(u_{2n})_{n\geq 0}$.
(b) Etudier la convergence de la suite $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$.
(c) La suite u est-elle convergente?

Exercice 3

Un tourniquet comprend 3 cases A, B et C. Au cours des instants successifs 0,1,2,3,...,n une boule se déplace sur le tourniquet de la manière suivante :
à l'instant 0, la boule est en A. Si à l'instant n la boule est en A, à l'instant $n+1$ elle est en B ou en C avec équiprobabilité. Si à l'instant n la boule est en B, à l'instant $n+1$ elle est en A ou en C avec équiprobabilité. Si à l'instant n la boule est en C, elle y reste à l'instant $n+1$.

Pour n entier naturel, on désigne par : A_n l'événement "la boule est dans la case A à l'instant n", B_n l'événement "la boule est dans la case B à l'instant n" C_n l'événement "la boule est dans la case C à l'instant n" et l'on note $a_n = P(A_n)$,$b_n = P(B_n)$,$c_n = P(C_n)$.

1. (a) Calculer les probabilités a_0,b_0,c_0,a_1,b_1,c_1.
   (b) Calculer soigneusement les 9 probabilités suivantes :
$$\begin{array}{lll} P(A_{n+1}/A_n), & P(A_{n+1}/B_n), & P(A_{n+1}/C_n); \\ P(B_{n+1}/A_n), & P(B_{n+1}/B_n), & P(B_{n+1}/C_n); \\ P(C_{n+1}/A_n), & P(C_{n+1}/B_n), & P(C_{n+1}/C_n). \end{array}$$
   (c) Exprimer a_{n+1} (resp.b_{n+1}) en fonction de a_n,b_n et c_n.
   (d) Montrer que les deux suites a et b sont récurrentes d'ordre 2 et satisfont à une relation de récurrence du type : $u_{n+2} = \dfrac{1}{4}u_n$.
   (e) En déduire a_n et b_n en fonction de n.
   (f) Calculer $a_n + b_n + c_n$. En déduire c_n en fonction de n.
2. On désigne par F_n l'évenement "la boule est en C pour la première fois à l'instant n" et par F l'évènement "la boule arrive un jour en C "
   (a) Vérifier que $F_n = (A_{n-1} \cap C_n) \cup (B_{n-1} \cap C_n)$.
   (b) Calculer $P(A_{n-1} \cap C_n)$ et $P(B_{n-1} \cap C_n)$. En déduire $P(F_n)$.
   (c) Exprimer F en fonction des F_n. Si $k \neq l$, que dire de $F_k \cap F_l$?
   (d) En déduire $P(F)$ (on pourra utiliser le rappel de l'exercice 4.

Exercice 4

Une urne contient 8 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes. Un joueur effectue dans cette urne des tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée avant de tirer la suivante, jusqu'à ce qu'il obtienne soit une boule rouge, auquel cas il a gagné et le jeu s'arrête, soit une boule verte, auquel cas il a perdu et le jeu s'arrête également.
Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'événement : "le joueur est déclaré vainqueur à 1' issue du n-ième tirage" et B_n l'événement : "le joueur joue toujours à 1' issue du n-ième tirage"
On note également A l'évènement "le joueur gagne" et B l'évènement "le jeu ne s'arrête jamais ".

Rappel : si $\mid a \mid < 1$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.

1. (a) Exprimer A_n en fonction des évènements R_k,V_j,N_l puis calculer $P(A_n)$.
   (b) Exprimer A en fonction des A_n. En déduire la probabilité que le joueur gagne?
   (c) Quelle est la probabilité que le joueur perde?

   (a) Exprimer B_n en fonction des évènements R_k,V_j,N_l puis calculer $P(B_n)$
   (b) Exprimer B en fonction des B_n. En déduire la probabilité que ce jeu ne s'arrête jamais?