

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'une page et de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1

1. Simplifier le plus possible l'expression

$$\exp \ln((x-1)^2) + 2 \exp(2 \ln(x+1)) - 4$$

2. Déterminer soigneusement les solutions de l'équation

$$\exp \ln((x-1)^2) + 2e^{2 \ln(x+1)} - 4 = 0$$

Exercice 2

Soit x le prix initial d'un produit A .

Ce produit a subi une augmentation de 300% par an pendant 10 ans.

Les dix années suivantes, il a baissé de 25% par an.

On note y (resp. z) le prix de ce produit au bout de 10 ans (resp. 20 ans).

1. Exprimer y en fonction de x et z en fonction de y .
2. Déterminer l'inflation moyenne annuelle subi par ce produit pendant 20 ans.

On donnera tous les résultats sous une forme exacte et simplifiée.

Exercice 3

Soient a un nombre réel et P le polynôme défini par

$$P(x) = x^4 - ax^3 - 3x^2 + x(3a-2) + 2a$$

1. Montrer que -1 est un zéro de P .
2. On suppose dans les questions suivantes que $a \neq -1$
 - (a) Déterminer l'ordre de multiplicité de -1 .
 - (b) A l'aide d'une division euclidienne convenable, factoriser le polynôme P en produit de facteur de degré 1.
3. On suppose dans les questions suivantes que $a = -1$.
 - (a) Expliciter P et déterminer l'ordre de multiplicité de -1 .
 - (b) Factoriser le polynôme P en produit de facteurs de degré 1 (sans effectuer de division euclidienne).

Exercice 4

$$\text{Soit } f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 6}{e^{2x} - 4e^x + 3}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Résoudre les inéquations suivantes

$$(a) (E) : e^{2x} + e^x - 6 \leq 0$$

$$(b) (F) : e^{2x} - 4e^x + 3 \geq 0$$

3. Soit $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3}$.

Déterminer deux réels a et b tels que que

$$\forall x \in \mathcal{D}_g, g(x) = 1 + \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-1}.$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{3x^4 - 7x^3 - 33x^2 - 33x - 10}{3x^3 + 2x^2 - 3x - 2}.$$

On considère également les polynômes

$$P(x) = 3x^4 - 7x^3 - 33x^2 - 33x - 10$$

$$\text{et } Q(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$$

1. Déterminer une racine évidente de $Q(x)$ puis factoriser le polynôme $Q(x)$.
 - (a) Montrer que -1 est une racine de P et déterminer l'ordre de cette racine.
 - (b) Enoncer la définition et le théorème du cours qui justifient l'existence d'un polynôme $S(x)$ tel que $P(x) = (x+1)^2 S(x)$. Quel est le degré de S ?
 - (c) Expliciter la factorisation de $P(x)$ en produit de facteurs de degré 1
- (a) Déterminer le domaine de définition de f puis donner une expression factorisée et simplifiée de f .
- (b) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.
- (c) Déterminer deux réels a et b tels que

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1}.$$
 En déduire soigneusement le sens de variation de f sur $[5; +\infty[$