www.mathematiques.ht.st

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de deux pages, de deux questions de cours, de cinq exercices (dont un de programmation) et de deux problèmes. Ces exercices et ces problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h **Bonne chance**

Question de cours 1
Donner la définition d'un arrangement et d'une combinaison

Question de cours 2
Rappeler la formule du triangle de Pascal

Exercice 1
Calculer les sommes suivantes :

$A_n = \sum_{k=0}^{n-1}(2^k + 6k + 7n - 1) \qquad B_n = \sum_{i=1}^{999\,999}(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) \qquad C_n = \sum_{p=3}^{n}(-1)^p 5^{3p+2}$

Exercice 2
Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\sum_{i=2}^{n} i \times 2^i = 2^{n+1}(n-1)$

Exercice 3
Simplifier l'expression $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!}$ puis montrer que $\forall n \geqslant 1 \quad \sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Exercice 4
Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15 :
- les boules numérotées de 1 à 5 de ces boules sont blanches
- les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

1. On tire au hasard 2 fois une boule de l'urne sans remise
   (a) Combien y-t-il de tirages au total?
   (b) Combien y-a-t-il de tirages donnant une boule blanche et une boule noire
      i. dans cet ordre?
      ii. dans un ordre quelconque?
2. On tire simultanément 5 boules de l'urne.
   (a) Combien y-t-il de tirages possibles?
   (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires?

Exercice 5
Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur deux entiers n et m et qui lui retourne (en l'affichant bien entendu à l'écran) les nombres $a = n + m$ et $b = \sin(n \times m)$

Problème 1
Une urne contient trois boules numérotées 1, 2, 3. On pioche au hasard n fois une boule de l'urne en remettant la boule après tirage. Un tirage est la suite des chiffres obtenus lors des n pioches.
Par exemple, si $n = 2$, on pioche une boule de l'urne, ensuite on la repose dans l'urne puis on repioche une boule dans cette urne : la pioche de la boule $n°$ 1 puis de la boule $n°$ 3 est un exemple de tirage lorsque $n = 2$.

1. On suppose dans cette question que $n = 3$.
   (a) Dénombrer les tirages possibles.
   (b) Dénombrer le nombre de tirages tel que les trois chiffres (1,2,3) apparaissent au moins une fois.
2. On suppose dans cette question que $n = 4$.
   Dénombrer le nombre de tirages tel que les trois chiffres (1,2,3) apparaissent au moins une fois.
3. On suppose dans toute la suite de l'exercice que n est un entier quelconque $\geqslant 3$.
   Calculer le nombre de tirage possibles
4. Pour tout nombre entier $i \in 1; 2; 3\}$, on pose $A_i = \{$le numéro i n'apparait pas durant les n tirages$\}$.
   Par exemple, $A_2 = \{$le numéro 2 n'apparait pas durant les n tirages$\}$
   (a) Calculer $Card(A_1)$,$Card(A_2)$ et $Card(A_3)$.
   (b) Calculer $Card(A_1 \bigcap A_2)$,$Card(A_2 \bigcap A_3)$ et $Card(A_1 \bigcap A_3)$.
   (c) Calculer $Card(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3)$.
   (d) En déduire $Card(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3)$.
5. Traduire en language courant, l'évènement $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3$?
   En déduire le nombre de tirages où chaque numéro a été obtenu durant les n tirages.

Problème 2
Soit x un nombre réel.

1. Calculer pour tout entier n, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.
   En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k}$
2. A l'aide du changement de variable $j = k - 1$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$.
   (a) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout entier $k \leqslant n$, on a $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.
   (b) En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ puis celle de $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.
3. On suppose dans la suite que $n \geqslant 2$.
   (a) A l'aide de la formule obtenue dans la question 2a, exprimer $(k-1)C_{n-1}^{k-1}$ en fonction de C_{n-2}^{k-2}.
   (b) En déduire l'expression de $k(k-1)C_n^k$ en fonction de C_{n-2}^{k-2}.
   (c) Calculer $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ puis $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$
4. Développer $k(k-1)$ puis en déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.
5. Des questions 2b et 4, en déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - (\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k})^2 = nx(1-x)$.