Exercice 1 (http ://abdellah.bechata.free.fr)
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes puis montrer qu'elles sont continues et dérivables sur leurs domaines de définition respectifs et calculer leurs dérivées.

1. $b(x) = \ln(e^x + e^{-x})$
2. $c(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$
3. $d(x) = 1 + xe^{\frac{1}{1-x}}$
4. $e(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$
5. $f(x) = (x+1)^x$

Exercice 2
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont continues en x_0 ?
Parmi celles qui sont continues en x_0, lesquelles sont dérivables en x_0 ? Dans ce cas, calculer la dérivée en x_0.

1. $x_0 = 1$ et $a(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{\cos \pi x} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$
2. $x_0 = 0$ et $b(x) = \begin{cases} x \ln x^2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
3. $x_0 = 0$ et $c(x) = \begin{cases} x^2 \ln x^2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
4. $x_0 = 0$ et $d(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
5. $x_0 = 0$ et $e(x) = \begin{cases} \frac{\exp(-\frac{1}{x})}{x^2+1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
6. $x_0 = 1$ et $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 1 \\ \cos \pi x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

Exercice 3
Démontrer les inégalités suivantes

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}x.$
2. $\forall x \geqslant 1,\ \ln x \leqslant 2\sqrt{x}.$
3. $\forall x \in [0,1],\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x.$
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ xe^x + 1 \geqslant e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}.$
6. $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ 1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}.$

A l'aide des questions précédentes, retrouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Exercice 4
Soient a un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par $f(x) = \dfrac{\sin x^a}{x}$.

1. On suppose dans cette question que $a > 2$.
   (a) Montrer que la fonction f se prolonge par continuité de f sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$? Est-elle dérivable en 0 ? Si oui, la fonction f' est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?
2. Refaire toutes les questions précédentes lorsque $a = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 5
Soit a un nombre réel. On définit la fonction f sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \dfrac{\sin x - x}{1 - \cos x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = a$

1. Montrer qu'il existe une unique valeur a_0 de a pour laquelle la fonction f est continue $[0, \dfrac{\pi}{2}]$?
   Dans la suite de l'exercice, on supposera que $a = a_0$.
2. Montrer que f est dérivable sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ et expliciter $f'(x)$ $\forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.
3. La fonction f' est-elle continue sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$?

Exercice 6
On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ puis qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. La fonction f' est-elle continue sur $\mathbb{R}^\times$? Est-elle continue en 0 ?
3. Soit $g(x) = xe^x - e^x + 1$. Etudier le signe de la fonction g. En déduire le tableau de variation de f.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$) sur un intervalle à déterminer.

Exercice 7
On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$.

1. Etudier la parité de f puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. En déduire son tableau de variation.
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.