Exercice 1
Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule couleur dans l'urne.
Soit X le nombre de tirages nécessaires.
Expliciter la loi de X, son espérance et son écart-type.

Exercice 2
On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes.
On effectue des tirages successifs jusqu'a ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes.
On note X la var "nombre de tirage effectués".
Déterminer la loi de X et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 3
Soit X une var discrète suivant la loi $\mathcal{U}_{[|3,6|]}$ et Y la var définie par $Y = 2X^2 + 3$.
Calculer l'espérance et la variance de X (resp. Y) puis déterminer la loi de Y.

Exercice 4
Soit X une var prenant les valeurs $0, 1, 2$ et telle que : $P[X = 0] = a$, $P[X = 2] = a$.

1. Pour quelle valeur de a définit-on ainsi une loi de probabilité ?
2. On suppose dorénavant que $a = \dfrac{1}{4}$.
   On introduit la var Y telle que $Y = 2X - 1$.
   X et Y sont-elles indépendantes ?
   Calculer $E(X), V(X), \sigma(X)$ puis $E(Y), V(Y), \sigma(Y)$.

Exercice 5
On lance n fois consécutives une pièce. La probabilité d'obtenir "pile" est p et celle d'obtenir "face" est $q = 1 - p$.
Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

1. Donner la loi de X_2.
2. Donner la loi de X_3. Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.
3. Trouver la loi de X_4. Calculer $E(X_4)$.

Exercice 6
On tire simultanément r jetons d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n $(r \leqslant n)$. On note $X_{n,r}$ la var égale au maximum des r numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de $X_{4,2}$.
2. Déterminer la loi de $X_{5,3}$ puis celle de $X_{n,3}$.
3. On suppose maintenant que r est quelconque.
   Déterminer la loi de $X_{n,r}$. En déduire que si $0 \leq r \leq n$ alors $\sum\limits_{k=r}^{n} C_{k-1}^{r-1} = C_n^r$.

Exercice 7
On tire, avec remise, r boules d'une urne contenant n boules numérotés de 1 à n $(r \leqslant n)$. On note $X_{n,r}$ la var égale au maximum des r numéros obtenus et $Y_{n,r}$ la var égale au minimum des r numéros obtenus

1. On suppose dans cette question que $r = 2$ et $n = 4$.
   Calculer $P(X_{4,2} \leq k)$ (resp. $P(Y_{4,2} \geq k)$) pour tout entier $k \in \{1, .., 4\}$.
   En déduire la loi de $X_{4,2}$ (resp. $Y_{4,2}$)
2. Même question qu'au 1 lorsque $r = 3$ et n quelconque.
3. Même question qu'au 1 lorsque r est un entier quelconque.

Exercice 8
Une boite A contient 2 jetons portant le numéro 0, et une boite B contient 2 jetons portant le numéro 1.
On tire au hasard un jeton dans chaque boite et on les échange.
On recommence l'opération n fois.
Soit X_n la var égale à la sommes des jetons de la boite A à l'issue du $n^{\text{ème}}$ échange.

1. Déterminer la loi de X_n et $E(X_n)$ lorsque $n = 1, 2$ puis 3.
   Dans la suite, n désigne un entier quelconque.
   On note $p_n = P(X_n = 0)$, $q_n = P(X_n = 1)$ et $r_n = P(X_n = 2)$.
2. Déterminer $X_n(\Omega)$.
3. Calculer soigneusement les probabilités conditionnelles
   $P(X_{n+1} = k / X_n = j)$ avec $(k, l) \in \{0, 1, 2\}^2$
4. Exprimer p_{n+1}, q_{n+1} et r_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.
5. Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire que la suite q est arithmético-géométrique et expliciter q_n en fonction de n.
6. Déterminer la loi de X_n.
7. Calculer les limites des suites p, q, r et $(E(X_n))_n$. Interprétation.