Exercice 1 (http ://abdellah.bechata.free.fr)
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires.Un joueur tire successivement 5 boules avec remise.
S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il en perd 3.
Soit X le nombre de boules blanches et Y le nombre de points obtenus.

1. Déterminer la loi de X, puis $E(X)$ et $V(X)$.
2. Exprimer Y en fonction de X. En déduire la loi de Y, puis $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. Refaire l'exercice si l'on supose que le jeu est sans remise.

Exercice 2
On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée.
A chaque lancer la probabilité d'obtenir pile est égale à $\dfrac{2}{3}$ tandis que celle d'avoir face est $\dfrac{1}{3}$.
Les lancers sont supposés indépendants. Soit n un entier naturel non nul.
On note A_n l'évenèment"on obtient pour la première fois, de deux piles consécutifs au $n^{ème}$ lancer".
On note p_n la probabilité de l'évènement A_n.

1. Expliciter l'évènement A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5. Déterminer la valeur de p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que $\forall n \geqslant 3$, $p_n = \dfrac{2}{9}p_{n-1} + \dfrac{1}{3}p_{n-2}$.
   Indication : si l'on a obtenu pile (resp. face) au premier lancer, que peut-on obtenir au suivant ?
3. En déduire l'expression de p_n en fonction de n pour $n \geqslant 1$ puis la limite de p.

Exercice 3
Le jeu est le suivant : un plateau est constitué de 25 cases. Derrière 2 de ces cases se cache une bouteille de Champagne d'une valeur de p francs. On mise 10 F sur chacune des n cases que l'on choisit et on gagne aucune, la ou les bouteilles correspondantes à ces cases. Soit X_n, $1 \leq n \leq 25$, la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles gagnées.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_n et son espérance $E(X_n)$.
2. Soit Y_n, $1 \leq n \leq 25$, la variable aléatoire égale au gain résultant de ce jeu (le gain d'une bouteille de Champagne est équivalent au gain de p francs).
   Exprimer Y_n en fonction de X_n et en déduire l'espérance de Y_n. Conclure.

Exercice 4
On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de rois obtenus lorsque l'on tire les 5 cartes successivement avec remise.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Un jeu consiste à miser 2 euros et à recevoir a euros par roi obtenu. Soit G_X la variable aléatoire égale au gain en euro. Exprimer G_X en fonction de X et de a. Pour quelles valeurs de a le jeu est-il favorable au joueur ?
3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de rois obtenus lorsqu'il n'y a pas remise.
   (a) Déterminer la loi de Y et son espérance $E(Y)$
   (b) Soit G_Y la variable aléatoire égale au gain en euro. Exprimer G_Y en fonction de Y et de a.
   (c) Pour quelles valeurs de a le jeu est-il favorable au joueur
   (d) Quelle différence peut-on faire entre ces deux jeux ?

Exercice 5
n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Montrer que $N(\Omega) = \{2, n+1\}$.
2. Montrer que : $\forall k \in \{1, n\}$, $P(N > k) = \dfrac{A_n^k}{n^k}$.
3. Montrer que : $\forall k \in \{2, n\}$, $P(N = k) = P(N > k-1) - P(N > k)$.
4. Calculer $P(N = n+1)$ puis en déduire la loi de N.
5. Montrer que l'espérance $E(N)$ de la variable aléatoire N est : $E(N) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{A_n^k}{n^k}$.