Exercice 1 (http ://abdellah.bechata.free.fr)
Justifier que chacune des fonctions suivantes possède une primitive sur l'intervalle considéré et en déterminer une :
a) $x \mapsto (x^2+1)(3-x)$ sur $\mathbb{R}$ b) $x \mapsto x \sin x^2$ sur $\mathbb{R}$ c) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\exp(\dfrac{1}{x})$ sur $\mathbb{R}_+^\times$

Exercice 2
Déterminer l'unique primitive F sur $\mathbb{R}$, de la fonction
a) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ avec $F(0) = 3$ b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{(4+5\cos x)^2}$ avec $F(\dfrac{\pi}{2}) = 1$

Exercice 3
Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de la fonction $g(x) = \int\limits_0^x \dfrac{dt}{1-t^2}$?
Montrer que g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ et calculer g'.
Déterminer a et b tels que $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{t-1}$. En déduire $g(x)$.

Exercice 4
Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :
$I_1 = \int\limits_{-1}^1 (t+1)(t+2)^2 dt$, $I_2 = \int\limits_0^4 \sqrt{x}\,(x - 2\sqrt{x})\,dx$, $I_3 = \int\limits_1^2 3^x dx$,
$I_4 = \int\limits_1^4 \dfrac{1}{x\sqrt{x}} dx$, $I_5 = \int\limits_0^1 (2x-1)\exp(x^2-x+1)dx$, $I_6 = \int\limits_1^2 \dfrac{(\ln t)^5}{t} dt$
$I_7 = \int\limits_0^2 \dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^3}} dt$, $I_8 = \int\limits_0^{\pi/4} \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} dx$, $I_9 = \int\limits_0^{\pi/4} \tan x dx$

Exercice 5
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties :
$I = \int\limits_0^1 t^2 \cos t dt$ $J = \int\limits_0^1 (x^2+x)e^x dx$ $K_n = \int\limits_1^e t^n \ln t dt$ $L = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$

Exercice 6
Calculer l'intégrale $I = \int\limits_0^\pi x \sin x dx$
a) par intégration par partie b) en posant le changement de variable $x = \pi - t$

Exercice 7
Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :
a) $\int\limits_0^1 x\sqrt{3x+1} dx$ $(u = 3x+1)$ b) $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $(x = \sin u)$

Exercice 8
Sans calcul, simplifier les intégrales suivantes
a) $\int\limits_{-4}^4 \dfrac{xdx}{1+x^2}$ b) $\int\limits_{-1}^1 \exp(-x^2)dt$ c) $\int\limits_{3\pi}^{5\pi} \sin t dt$

Exercice 9
Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction $f(x) = \int\limits_{1/x}^x \dfrac{\ln t}{1+t^2} dt$
Montrer que f est dérivable et calculer f'. En déduire f.
En posant le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$, retrouver la valeur de $f(x)$.

Exercice 10
Montrer que la fonction $f(x) = \int\limits_0^{\tan x} \dfrac{dt}{1+t^2}$ est dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.
Calculer f'. En déduire f. Application : calculer $\int\limits_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$ et montrer que $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{dt}{1+t^2} = \pi$.

Exercice 11
On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n!}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{n!}$.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad I_n = e - \sum\limits_{k=0}^n \dfrac{1}{k!}$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^n \dfrac{1}{k!}$.

Exercice 12
$\forall n \geqslant 1$, on note $I_n = \int_0^1 \dfrac{t^n}{1+t^2} dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$.

1. Calculer I_1 et montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, $J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} I_{n+2}$.
3. En déduire la convergence de la suite (J_n) et un équivalent simple de J_n en $+\infty$.

Exercice 13
Expliciter le théorème sur les sommes de Riemann aux fonctions suivantes
a) $a(x) = \dfrac{1}{x}$, $I = [1, 2]$ b) $b(x) = \sin x$, $I = [0, \pi]$ c) $c(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $I = [0, 1]$

Exercice 14
Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \tan \dfrac{k\pi}{4n}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{2k+n}{k^2+kn+n^2}$