Exercice 1 (www.mathematiques.ht.st)
Etudier l'existence des intégrales suivantes et les calculer :
a) $\int_1^e (x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})dx$ b) $\int_{-1}^x \frac{dt}{1-t}$ c) $\int_0^{\pi/6} \sin 3u\, du$ d) $\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n}dx$ $(n \in N^*)$

Exercice 2
Soient I et J les intégrales définies par :
$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$
Montrer que $I = J$ (on posera $t = \frac{\pi}{2} - x$). Calculer $I + J$. En déduire I et J.

Exercice 3
1. Domaine de définition, continuité; dérivabilité et dérivée de la fonction $I(x) = \int_1^x \frac{t^2+3t+6}{t+1}dt$ et la calculer
(on effectuera la division euclidienne par $t+1$).
2. Représenter graphiquement la fonction $f : t \mapsto \frac{t^2+3t+6}{t+1}$.
3. Interpréter $I(x)$ en terme d'aire. Etudier sa limite lorsque $x \to -1$.
4. Mêmes questions avec $J(x) = \int_1^x g(t)dt$ où $g : t \mapsto t + 2 + \frac{4}{(t+1)^2}$.

Exercice 4
Calculer les intégrales suivantes :
a) $\int_0^x te^{2t}\, dt$ b) $\int_0^{\pi/2} x\cos(3x)\, dx$ c) $\int_1^4 \sqrt{x}\ln x\, dx$ d) $\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^3}dt$ e) $\int_0^\pi \sin u\, e^u du$

Exercice 5
A l'aide du changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes :
a) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos^3 t}dt$ $(u = \cos t)$ b) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^3+1)}$ $(u = x^3+1)$
c) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ $(u = e^x)$ d) $\int_1^e \sin(\pi \ln x)dx$ $(u = \pi \ln x)$

Exercice 6
Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \sin u \leqslant u$ puis que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin(t^n)\ln(1+t^2)dt = 0$

Exercice 7
Montrer que : $\forall t \geqslant 1 \quad \frac{1}{t+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^2+\sqrt{t}+1}} \leqslant \frac{1}{t}$.
En déduire $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+\sqrt{t}+1}}dt = \ln 2$.

Exercice 8
Etudier la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ et calculer I $= \int_0^1 f(t)dt$
(on utilisera une intégration par parties).

Exercice 9
On considère la fonction numérique Φ définie par $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^2}}$.

1. Quel est le domaine de définition de Φ ?
2. Montrer que Φ est une fonction impaire
(on utilisera un changement de variable adéquat)
3. Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad \frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant \Phi(x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.
(On utilisera la monotonie de $t \mapsto \frac{dt}{\sqrt{4+t^2}}$)
En déduire la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Justifier la dérivabilité de Φ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\Phi'(x)$.
Dresser le tableau de variation de Φ.

Exercice 10
On pose pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$, et $I_0 = e - 1$.

1. Etablir, pour tout entier naturel n : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
2. Montrer, pour tout entier naturel n : $I_n \geqslant 0$.
3. Déduire des questions 1) et 2) que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.
4. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in N}$? Montrer : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.