Exercice 1

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique.
3. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression A^n en fonction de n

Exercice 2

On souhaite expliciter toutes les suites (a_n),(b_n) et (c_n) telles que
$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n - b_n + \dfrac{3}{2}c_n \\ b_{n+1} &= -\dfrac{3}{2}a_n + \dfrac{7}{2}b_n - \dfrac{9}{2}c_n \\ c_{n+1} &= -a_n + 2b_n - \dfrac{5}{2}c_n \end{cases} \quad \text{avec } a_0,b_0,c_0 \in \mathbb{R}.$$

On pose $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & 9 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$.
3. Vérifier que $A = -\dfrac{1}{2}B$. En déduire l'expression de A^n en fonction de B^n.
4. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}
5. Montrer que $B = PDP^{-1}$ où D est une certaine matrice diagonale.
En déduire que $\forall n \geqslant 0, \quad B^n = PD^nP^{-1}$.
6. Expliciter les coefficients de la matrice A^n
7. Donner l'expression des trois suites a,b et c en fonction de n et des conditions initiales a_0,b_0 et c_0 puis déterminer les limites respectives de ces trois suites

Exercice 3

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$

1. Calculer B^2 et B^3. En déduire l'expression de B^k en fonction de k.
2. En remarquant que $A = B + 2I$, calculer A^n

Exercice 4

Soient a,b deux réels et soient les trois matrices : $A = \begin{pmatrix} -b & a+b & 2a+2b \\ -2a-2b & 3a+2b & 3a+3b \\ a+b & -a-b & -b \end{pmatrix}$,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $A = aF + bG$ puis montrer que les matrices F et G commutent.
2. Calculer G^2 et G^3. En déduire la valeur de G^n si $n \geqslant 3$
3. A l'aide de la formule du binôme, calculer A^n.

Exercice 5

Soit a un nombre réel et $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$

1. Montrer que, pour tous réels a, b, on a : $M(a).M(b) = M(a+b-3ab)$.
2. On remarque que $M(0) = Id$
   (a) On suppose que $a \neq \dfrac{1}{3}$.
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur b pour que $M(b)$ soit l'inverse de $M(a)$. Déterminer alors l'inverse de $M(a)$.
   (b) On suppose $a = \dfrac{1}{3}$. La matrice $M(a)$ est-elle inversible?
   (c) En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer son inverse.
3. Déterminer le réel a_0 non nul, tel que : $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$
4. On considère les matrices : $P = M(a_0)$ et $Q = I - P$ où I désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.
   (a) Montrer qu'il existe un réel α, que l'on exprimera en fonction de a, tel que : $M(a) = P + \alpha Q$
   (b) Calculer P^2, QP, PQ, Q^2.
   (c) Pour tout entier naturel n, non nul, montrer que $[M(a)]^n$ s'écrit comme combinaison linéaire de P et Q.
   (d) Expliciter alors la matrice $[M(a)]^n$.