Exercice 1
Calculer les sommes suivantes
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n-1)}{5^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{5^n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n^2+5n}{5^n}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{3^n}$,e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{3^n}$,
f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}$ g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$, h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4(-1)^{n+1}}{n!}$, i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{(n+1)!}$.

Exercice 2
On admettra que pour $|x|<1$ et k dans $\mathbb{N}^\times$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+k)!}{n!}x^n=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Soit a un réel tel que $0<a<1$.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs entières dont la loi est donnée par :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad P(X=n)=(1-a)^n.a.$$

   (a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.

2. Une urne contient des boules blanches et des boules noires en proportion p et q, $p+q=1$.
   On effectue des tirages avec remise ; le nombre de tirages suit la loi de X.
   Y est la variable aléatoire égale au nombre de boule blanches obtenues.

   (a) Calculer pour tous les entiers k et n la probabilité conditionnelle $P(Y=k/X=n)$, ainsi que $P(Y=k\cap X=n)$.
   (b) En déduire la loi de Y et calculer l'espérance de Y.

Exercice 3
Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue des tirages successifs en remettant à chaque fois la boule tirée. Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la $1^{ère}$ boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X et donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Soit Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la $2^{ème}$ boule blanche.

   (a) Déterminer la loi conjointe de (X,Y).
   (b) Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.
   (c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4
Une pièce de monnaie amène pile avec la probabilité p $(0<p<1)$ et face avec la probabilité $q=1-p$. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par un joueur qui attend le 1^{er} pile mais qui décide de s'arrêter au bout de m lancers au plus $(m\in\mathbb{N}^\times)$.

1. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de lancer nécessaire pour obtenir le 1^{er} pile.
   Déterminer la loi de X
2. Exprimer Y en fonction de X et de m.
3. Déterminer la loi de Y
4. Montrer que Y admet une espérance et calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 5
Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet $n°1$.

1. Calculer $P\left(X=k/N=n\right)$, $0\leqslant k\leqslant n$.
2. Justifier que $P(X=k)=\sum\limits_{n=k}^{+\infty}P\left(X=k/N=n\right)P(N=n)$
3. Montrer que $P(X=k)=e^{-\lambda}(\dfrac{1}{m})^k\dfrac{\lambda^k}{k!}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-\dfrac{1}{m})^n\dfrac{\lambda^n}{n!}$
4. En déduire la loi de probabilité de X (on retrouvera une loi usuelle)
5. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.