Exercice 1

On dispose de deux pièces. Pour chaque pièce, la probabilité d'obtenir " pile " à chaque lancer vaut p, et celle d'obtenir " face " vaut q, avec $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$. Deux joueurs J_1 et J_2 prennent chacun une pièce et réalisent l'expérience qui consiste à lancer sa pièce jusqu'à obtenir pour la première fois " pile ". On note X_1 le nombre aléatoire de lancers effectués par J_1 et X_2 le nombre aléatoire de lancers effectués par J_2.

1. Quelle est la loi de X_1 ? de X_2 ? Préciser l'espérance de X_1 et X_2.
2.
   (a) Pour i et j entiers naturels non nuls, calculer la probabilité de l'événement $[(X_1 = i)$ et $(X_2 = j)]$.

   (b) Pour i entier naturel non nul, calculer la probabilité de l'événement $[(X_1 = i)$ et $(X_2 \geqslant i)]$.

   (c) Calculer la probabilité de l'événement $(X_1 = X_2)$, puis de l'événement $(X_1 \geqslant X_2)$.

   (d) Calculer la probabilité de l'événement $(X_1 \geqslant 2X_2)$.
3. Les joueurs J_1 et J_2 réalisent n fois l'expérience précédente, n étant un entier naturel non nul fixé.
   Soit Y le nombre de fois où J_1 et J_2 concluent l'expérience en même temps.
   Quelle est la loi de Y ? Quelle est son espérance ?

Exercice 2

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p , $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

   (a) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

   (b) Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

   On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^\times)^2$ de la façon suivante :

   pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^\times)^2, (X = i$ et $Y = j)$ est l'événement

   $''$ les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)^{ième}$

   est blanche ou les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)^{ième}$ est verte $''$.

   Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.
2.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

   (b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$.

   (c) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.
3. Montrer, pour tout (i, j) de $(\mathbb{N}^\times)^2$:

   $$P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

   (a) En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

   (b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

   (c) Etablir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes
   (on pourra envisager $P(X = 1$ et $Y = 1)$).

(d) Démontrer que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 3

On dispose de deux urnes A et B : initialement l'urne A contient N boules noires tandis que l'urne B contient N boules blanches, avec $N \geqslant 2$. On y effectue une suite d'épreuves, chaque épreuve étant réalisée de la façon suivante :

On tire au hasard une boule dans chacune des deux urnes, la boule tirée de l'urne A est mise dans B, celle tirée de B est mise dans A.

On appelle Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne A à l'issue de la k-ième épreuve et l'on pose $Z_k = Y_{k-1} - Y_k$, pour k entier naturel non nul, avec la convention $Y_0 = N$.

Pour k et j entiers naturels, on pose : $p(k,j) = P(Y_k = j)$. Ainsi :

$P(Y_k = j) = 0$ si $j > N$, $\quad P(Y_0 = N) = 1$, $\quad P(Y_0 = k) = 0$ si $k < N$, $\quad P(Y_k = -1) = 0$

I). **Etude du cas particulier** $N = 2$

On note $U_k = \begin{pmatrix} p(k,0) \\ p(k,1) \\ p(k,2) \end{pmatrix}$, $V = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer U_1. Calculer les probabilités conditionnelles : $P_{(Y_k=j)}(Y_{k+1} = i)$ pour $i \in \{1,2,3\}$, et $j \in \{0,1,2\}$.

(2) Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout entier naturel k : $U_{k+1} = M.U_k$.

(3) Prouver que, pour tout entier naturel k non nul : $U_k = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} W + V$

(4) En déduire l'expression de $p(k,0), p(k,1)$ et $p(k,2)$ en fonction de k pour k entier naturel non nul.

(5) Montrer que l'espérance $E(Y_k)$ de la variable k est constante.

(6) Calculer la variance $V(Y_k)$ de la variable Y_k en fonction de k et sa limite lorsque k tend vers $+\infty$.

II). **Retour au cas général** Dans cette deuxième sous-partie, on revient au cas général avec $N \geqslant 3$ et on se propose d'étudier la convergence de la suite : $(E(Y_k))_{k\in\mathbb{N}^\times}$.

(1) Quelles sont les valeurs prises par la variable Z_k ?
Calculer : $P(Z_k = 1/Y_{k-1} = j)$, et : $P(Z_k = -1/Y_{k-1} = j)$, pour $j \in \mathbb{N}$, $\quad j \leqslant N$ et $k \in \mathbf{N}^\times$.

(2) En appliquant la formule des probabilités totales, prouver que, pour tout entier naturel k non nul :

$$E(Z_k) = \frac{2}{N} E(Y_{k-1}) - 1.$$

(3) Montrer que la suite $(E(Z_k))_{k\in\mathbb{N}^\times}$ est géométrique.

(4) En déduire l'expression de $E(Y_k)$ et de $E(Y_k)$ en fonction de k et de N.

(5) Montrer que les suites $(E(Z_k))_{k\in\mathbb{N}^\times}$ et $(E(Y_k))_{k\in\mathbb{N}^\times}$ sont convergentes et donner leur limite quand k tend vers $+\infty$.