Exercice 1
Déterminer les limites des suites suivantes

$$a_n = n^{22} - 8n^{21} + 17 \quad b_n = \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^2 - n + 1} \quad c_n = 2n - \ln n \quad d_n = n^2 e^{-n}$$
$$e_n = \sqrt{n^2+1} - n \quad f_n = \frac{\sin n}{n^3} \quad g_n = \frac{3^n}{n^a}\ a \in \mathbb{R} \quad h_n = \frac{(n+2)!}{(2n^2+1) \times n!}$$

Exercice 2
Soit n un entier quelconque, on définit le polynôme P_n par $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x(1-x^2)^k$.

Calculer $P_n(x)$. Pour quelle valeur de x la suite $(P_n(x))_{n \geqslant 0}$ converge-t-elle et calculer dans ce cas sa limite.

Exercice 3
Déterminer un équivalent des suites suivantes puis déterminer leurs limites
$$a_n = n^2 \sin \frac{-8n\sqrt{n} + 17}{n^3+1} \quad b_n = \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^2 - n + 1} \quad c_n = (2n - \ln n)\ln(\frac{n+2}{n+1}) \quad d_n = \sqrt{n^3+1} - n$$

Exercice 4
On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$

1. Montrer qu'il existe un entier N à partir duquel $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_n$
2. En déduire que pour tout $n \geqslant N$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$. Conclure.

Exercice 5
On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Montrer que $\forall\ n \geq 0$, $u_n > 0$ et déterminer ses limites éventuelles.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - 2| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - 2|$. Conclure.

Exercice 6
Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{3u_n + 1}$ et $u_0 > 0$.

1. Montrer que $\forall\ n \geq 0, u_n$ existe et $u_n > 0$. En déduire la monotonie de u (on calculera $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$)
2. La suite est-elle convergente et calculer sa limite éventuelle ?
3. Montrer que $\forall\ n \geq 0$, $u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{3}$ puis que $\forall n \geq 0$, $u_n \leq (\dfrac{1}{3})^n u_0$.
   Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 7
Soit u la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que $\forall\ n \geq 0$, $u_n > 0$. Déterminer la monotonie de u et les limites éventuelles de u ?
2. On suppose que la suite u est majorée. Montrer que la suite u converge. Conclusion
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2)$ puis montrer que $\forall\ n \geq 0$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 \geqslant 2$.
   En déduire que $\forall\ n \geq 0$, $u_n \geqslant \sqrt{2n + u_0^2}$ et retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 8
On considère la suite u définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \dfrac{n}{n^2+k}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que $\forall k \in \{1, .., 2n\}$, $\dfrac{1}{n+2} \leqslant \dfrac{n}{n^2+k} \leqslant \dfrac{n}{n^2+1}$
3. En déduire un encadrement de u_n puis calculer la limite de u.