Exercice 1
On considère f la fonction définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = (1-x)^n + (1-y)^n + (x+y)^n$$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2. Démontrer que le système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ possède une unique solution (x_0, y_0)
3. Calculer $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$, $\quad s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $\quad t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$ et $r^2 - st$.

Exercice 2
On pose $f(x,y) = 4x^2 - 2xy + 7y^2 + 4$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2. Démontrer que le système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ possède une unique solution (x_0, y_0) puis calculer $f(x_0, y_0)$.
3. Etudier le signe du trinôme $4X^2 - 2X + 7$.
4. En remarquant que
$$4x^2 - 2xy + 7y^2 = y^2(4(\frac{x}{y})^2 - 2\frac{x}{y} + 7)$$
lorsque y n'est pas nul, montrer que $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Interpréter ce résultat.