Symboles de sommation

Exercice 1
Ecrire sans le symbole $\sum$ les expressions ci-dessous :

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 \quad \sum_{j=3}^{8} \frac{j^2}{3^j} \quad \sum_{n=1}^{5} (-1)^{n^2} \frac{x^{2n+4}}{n} \quad \sum_{i=n}^{2n} i \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n+i} \quad \sum_{p=3}^{5} x(1-x^2)^p$$

Exercice 2
Ecrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$

1) $2^5+3^5+4^5+..+n^5$ 2) $1-a+a^2-a^3+...+(-1)^n a^n$

3) $\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^4}{4}+\dfrac{a^6}{6}+...+\dfrac{a^{2n}}{2n}$ 4) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}-..+(-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$

5) $\ln(1\times 2\times 3\times ..\times n)$. 6) $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{2}{2!}+\dfrac{2^2}{3!}+\dfrac{2^3}{4!}+..+\dfrac{2^{2003}}{2004!}$

Exercice 3
Calculer les sommes suivantes :

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}(5k+2) \quad B_n=\sum_{j=0}^{n}\frac{2^j}{3^{j+1}} \quad C_n=\sum_{p=2}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^p \quad D_N=\sum_{n=1}^{N}\left(2^n+3^{2n}\right)$$

Principe de récurrence

Exercice 4
Montrer par récurrence les égalités suivantes :

1) $\forall n\geqslant 0,\ \sum_{k=0}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 2) $\forall n\geqslant 1,\ \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)=n^2$

3) $\forall n\geqslant 0,\ \sum_{k=0}^{n} a^k=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$. 4) $\forall n\geqslant 0,\ \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_0$

5) $\forall n\geqslant 0,\ \ln x^n=n\ln x$ 5) $\forall n\geqslant 0,\ e^{nx}=(e^x)^n$

Exercice 5
On considère une suite u telle que $\forall n\geqslant 0,\quad u_{n+1}\leqslant a u_n$ où a est un réel positif.
Montrer par récurrence que $\forall n\geqslant 0,\quad u_n\leqslant a^n u_0$.

Suites arithmético-géométriques

Exercice 6
Montrer que la suite $3,5,7,9,\dots$ est arithmético-géométrique.
En déduire (sans calculatrice) la valeur de $3+5+7+\cdots+2003$.
Montrer que la suite $2,3,5,9,17,33,65,\dots$ est arithmético-géométrique.
Calculer la somme $2+3+5+9+17+\cdots+1025$.

Exercice 7
Calculer les sommes suivantes :

$A_n=1+2^2+2^4+2^8+\cdots+2^{2n}$ $B_n=1-3+3^2-3^3+\cdots+(-)^n3^n$

$C_n=2.3^2+2.3^3+2.3^4+\cdots+2.3^n$ $D_n=-7^2+7^3-7^4+\cdots+7^{2003}-7^{2004}$

Exercice 8
Soit u la suite définie par $u_0=3$ et $\forall n\geqslant 0, u_{n+1}=2u_n-4$.

1. Déterminer le réel β tel que la suite v définie par $v_n=u_n-\beta$ soit géométrique.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.
3. Calculer $u_0+u_1+\cdots+u_n$.

Exercice 9
Soit u la suite définie par $u_0=2$ et $\forall n\geqslant 0,\quad u_n-2u_{n+1}=2n+3$.

1. Montrer $v_n=u_n+2n-1$ est le terme général d'une suite géométrique.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer $S_n=\sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.

Exercice 10
Soient u et v les deux suites définies pour tout $n\geqslant 0$ par
$u_{n+1}=\dfrac{1}{3}(2u_n+v_n)$ et $v_{n+1}=\dfrac{1}{3}(u_n+2v_n)$.

1. On pose $t_n=u_n-v_n$ et $s_n=u_n+v_n$.
   (a) Montrer que t et s sont deux suites géométriques.
   (b) En déduire l'expression de t_n (resp. s_n) en fonction de t_0 (resp. s_0).
2. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n, de u_0 et de v_0.

Exercice 11
Soit u une suite telle que $u_0=2$ et $\forall n\geqslant 0,\quad u_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}u_n+3$.

1. Soit v la suite définie par $v_0=2$ et $\forall n\geqslant 0,\quad v_{n+1}=\dfrac{1}{2}v_n+3$.
   Montrer que $\forall n\geqslant 0,\quad u_n\leqslant v_n$.
2. Expliciter v_n en fonction de n. En déduire une majoration de u_n.