Exercice 1
Soient a, b deux réels. On pose $P = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer PQ.
2. Montrer que si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors P est inversible et calculer P^{-1}.
   Qu'en est-il si $(a, b) = (0, 0)$?

Exercice 2
Soit $a \in \mathbb{R}^{\times}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.
3. Application : résoudre le système $\begin{cases} 2y + 4z = 1 \\ \frac{1}{2}x + 2z = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$

Exercice 3
On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer J^2, J^3 et J^4. Que peut-on en déduire de J^k pour $k \geqslant 4$?
2. Développer algébriquement l'expression $(I + J)(I - J + J^2 - J^3)$.
3. En déduire que la matrice $(I + J)$ est inversible et expliciter son inverse.
4. Application : résoudre le système $\begin{cases} a + c - d & = & 2 \\ -2a + 2b + 2c - d & = & 0 \\ 2a - b & = & 0 \\ 3a - 2b - 2c + d & = & 3 \end{cases}$

Exercice 4
Résoudre par rapport à x, y, z le système (S) : $\begin{cases} x - y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases}$

En déduire que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 5
Déterminer parmi les matrices suivantes, les matrices inversibles et le cas échéant déterminer son inverse.

On procédera pour chaque matrice par deux méthodes : d'abord à l'aide des systèmes puis par opérations élémentaires sur les matrices.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. Pour quelle valeur du réel λ la matrice $A - \lambda I_4$ est inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices $X \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telles que $AX = \lambda X$ lorsque $\lambda = -1$ puis $\lambda = -3$.

Exercice 7
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} q & 0 & 1 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ où $q \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une matrice M telle que $A = qI + M$.
2. Calculer M^2. En déduire A^n.

Exercice 8
Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$

1. Calculer B^2 et B^3. En déduire l'expression de B^k en fonction de k.
2. En remarquant que $A = B + 2I$, calculer A^n

Exercice 9
Soient a, b deux réels et soient les trois matrices : $A = \begin{pmatrix} -b & a + b & 2a + 2b \\ -2a - 2b & 3a + 2b & 3a + 3b \\ a + b & -a - b & -b \end{pmatrix}$,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \text{et } G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $A = aF + bG$ puis montrer que les matrices F et G commutent.
2. Calculer G^2 et G^3. En déduire la valeur de G^n si $n \geqslant 3$
3. A l'aide de la formule du binôme, calculer A^n.