Exercice 1
On considère la suite u (récurrente d'ordre 3) définie par :

$$u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = -1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

L'objectif de l'exercice est d'expliciter u_n en fonction de n.
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Que vaut $P^{-1}AP$?
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D. En déduire D^n.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad D^n = P^{-1}A^nP$? En déduire les coefficients de A^n.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que l'on a, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire X_n en fonction de A^n et de $X_{0,}$
   (c) Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 2
Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge, passe au vert avec la probabilité p, et, lorsqu'il est vert, passe au rouge avec la probabilité q $(0 < p < 1$ et $0 < q < 1)$. On note r_n (respectivement v_n) la probabilité que ce feu soit au rouge (respectivement au vert) à l'instant $t = n$.

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
$$r_{n+1} = (1-p)r_n + qv_n \quad et \quad v_{n+1} = pr_n + (1-q)v_n.$$
2. En déduire l'existence d'une matrice carrée A d'ordre 2 telle que
$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et montrer par récurrence que $\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer deux matrices B et C telles que $\left\{ \begin{array}{l} B + C = I \\ B + (1-p-q)C = A \end{array} \right.$.
4. Calculer B^2, C^2, BC et CB.
5. Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
6. En déduire les valeurs de r_n et v_n en fonction de n, r_0 et v_0 puis les limites éventuelles des suites (r_n) et (v_n).

Exercice 3
On considère la matrice A suivante : $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

Calcul de la puissance $n^{ème}$ de A.

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. Calculer A^2, A^3 et montrer que : $A^3 = \frac{1}{2}(A^2 + A)$
3. Prouver, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, il existe des réels a_n et b_n tels que :
$$A^n = a_nA^2 + b_nA \text{ avec } \left\{ \begin{array}{lll} a_{n+1} & = & b_n + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n \end{array} \right.$$
Donner a_1 et b_1
4. Montrer que pour tout n non nul : $a_n + b_n = 1$.
En déduire que : $b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$
5. Exprimer alors b_n et $a_n$en fonction de n.

Etude de la loi d'une variable aléatoire X_n
Un point lumineux se déplace sur les sommets d'un triangle, notés C_0, C_1, C_2 selon le protocole suivant :

- - A l'instant 0, le point lumineux se situe en C_0
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}$, le point lumineux est en C_0, à l'instant $n+1$ il est en C_1
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}^\times$, le point lumineux est en C_1, à l'instant $n+1$ il est en C_0 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, en C_1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, en C_2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}^\times \backslash \{1\}$ le point lumineux est en C_2, à l'instant $n+1$ il est en C_1.

On appelle X_n la variable aléatoire égale à i si le point lumineux se trouve à l'instant n sur le sommet C_i, pour $i \in \{0, 1, 2\}$

1. On note U_n la matrice unicolonne : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ où $P(X_n = i)$ est la probabilité de l'événement $(X_n = i)$.
Préciser U_0 et U_1.
2. Utiliser la formule des probabilités totales et montrer que : $U_{n+1} = AU_n$
3. En déduire que pour tout entier n non nul : $U_n = A^nU_0$.
Préciser U_2, puis montrer que : $U_n = a_nU_2 + b_nU_1$.
4. En déduire les probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2)$ en fonction de n, ainsi que leur limite quand n tend vers $+\infty$.
5. Montrer que l'espérance de X_n est indépendante de n.