Exercice 1
Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x+1)^x$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est C^∞ sur $\mathcal{D}_f$ et expliciter f'.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$. Peut-on prolonger f par continuité en -1 ?

Exercice 2
On considère la fonction $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$

1. Montrer que f est continue sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f = [0,2]$.
2. La fonction f est-elle C^1 sur $]0,2[$?
3. Calculer $\lim\limits_{x\to -0^+} f'(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)$. Qu'en déduit-on ?
4. Etudier la dérivabilité de f en 2.
5. En déduire l'intervalle maximal sur lequel f est C^1.

Exercice 3
On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ puis que f est C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer f est C^∞ sur $\mathbb{R}^\times$.
3. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad f^{(n)}(x) = P_n(\dfrac{1}{x})f(x)$.
   En déduire, pour tout entier n, la limite de $f^{(n)}$ en 0.

Exercice 4
Considérons les fonctions suivantes :

$$a(x) = \ln(e^x + e^{-x}) \qquad b(x) = (x-2)\sqrt{2x - x^2}$$
$$c(x) = 1 + x\exp(\frac{1}{1-x}) \qquad d(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$$

1. Déterminer le domaine de définition de chacune de ces fonctions.
2. Montrer qu'elles sont toutes continues sur leurs domaines de définition respectifs.
3. Déterminer les fonctions qui sont C^1 sur leurs domaines de définition respectifs.

Exercice 5
Soient a un nombre réel strictement positif et f_a la fonction définie sur l'ensemble $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^a)}{x}$.

1. Montrer que f_a est C^∞ sur $]0,+\infty[$.
2. On considère la fonction $h_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^a)}{x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
   (a) Montrer que si $a > 1$, la fonction h_a est continue sur $[0,+\infty[$.
   (b) Qu'en est-il si $a \in]0,1[$? Si $a = 1$?
   (c) Montrer que si $a \geqslant 2$, la fonction h_a est C^1 sur $[0,+\infty[$.
   (d) On suppose $a = \dfrac{3}{2}$.
   Calculer $\lim\limits_{x\to 0} h'_a$ puis étudier la dérivabilité de h_a en 0.

Exercice 6
Déterminer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :

$$a(x) = e^{-x}\frac{x}{1+x} \qquad b(x) = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{1+2x}}{x} \qquad c(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$
$$d(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \qquad e(x) = \frac{x\ln(1+x) - \exp(x^2)}{x^2} \qquad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{1+x}}$$

Exercice 7
Déterminer un équivalent des fonctions suivantes au point x_0

$$x_0 = 0 \text{ et } a(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^4} - \sqrt[3]{1+x^4}} \qquad x_0 = 0 \text{ et } b(x) = (1+x^2)^{1002} - (1+x)^{2004}$$
$$x_0 = +\infty \text{ et } c(x) = \sqrt[3]{x + x^3} - x \qquad x_0 = +\infty \text{ et } c(x) = (1+x^2)^{1002} - (1+x)^{2004}$$

Exercice 8
Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{xe^x - e^x + 1} \qquad \lim_{x\to +\infty} x^2\ln(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}}) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}) \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{\ln(1+e^x) - e^x}{1 - \exp(\frac{1}{x})}$$