Exercice 1
On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1 + f(x)^2}$.
2. Etudier la parité de f et déterminer les équivalents de f en 0, $+\infty$ et $-\infty$.
3. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$? Expliciter f'.
4. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.

Exercice 2
On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Soit $g(x) = xe^x - e^x + 1$. Etudier le signe de la fonction g et en déduire le tableau de variation de f.
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à déterminer.

Exercice 3
Montrer que les équations suivantes possède une solution dans l'intervalle I

(a) $I = [-1, 1]$,	$x^{2004} - x^{2003} = 1$	(b) $I = [1, 10]$,	$\ln x = \dfrac{x^2 - 5}{x + 2}$
(c) $I = [0, 1]$,	$3x = 1 + \ln(2 + x^2)$	(d) $I = [\ln 2, 2\ln 2]$,	$e^x = 2 + x$

Exercice 4
Montrer que l'équation $3 - 2x = e^x$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
Vérifier que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Est-ce que $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$?

Exercice 5
On considère la fonction $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que pour tout entier positif n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n.
3. Comparer x_n et x_{n+1}. En déduire la monotonie de la suite x_n.
4. Démontrer que $x_n \leqslant n$ puis que $x_n \geqslant n - \ln n$. En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Exercice 6
On note (E_n) l'équation $(E_n) : \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = n$.

1. Etudier la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une unique solution, notée x_n, sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
3. Quelle est la monotonie de la suite $(x_n)_n$?
4. Montrer que $\forall n \geqslant 2, \quad n - 1 \leqslant x_n \leqslant n$.
5. En déduire la limite de la suite $(x_n)_n$ et donner son équivalent.

Exercice 7
Posons $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que, pour chaque entier $n \geqslant 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On note x_n cette racine.
2. Calculer x_2.
3. Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
4. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_n$ et montrer sa convergence.
5. Justifier que $\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Exercice 8
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :
$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
2. Calculer u_1 et u_2 et vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times$ $u_n \in]0, \dfrac{2}{3}[$.
3. Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. En évaluant l'inégalité précédente en $x = u_{n+1}$, déterminer le signe de $f_n(u_{n+1})$. Quelle est alors la monotonie de la suite (u_n) ?
5. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note λ sa limite.
6. A l'aide de la question 2., encadrer $(u_n)^n$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n$
   En déduire la limite de $(4 - 9u_n^2)$ et expliciter λ.