Exercice 1
On considère la fonction définie par $f(x) = \ln(-x^2 + x + 2)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Justifier que f est C^2 sur $]-1;2[$ et vérifier que $\forall x \in]-1;2[$, on a
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}.$$
3. En déduire que $\forall x \in [0;1]$, on a : $-\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
4. Prouver que $\forall x \in [0;1], \quad |f(x) - \ln 2| \leqslant \frac{1}{2}(x-1)$.

Exercice 2
On considère la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}(4 + u_n^2)$

1. Etude la fonction $f(x) = \frac{1}{5}(4 + x^2)$.
   (a) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   En déduire que $f([0,1]) \subset [0,1]$ et $f(]4,+\infty[) \subset]4,+\infty[$.
   (b) Déterminer les points fixes de f.
   (c) Montrer que $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{2}{5}$ et que $\forall x > 4, \quad f'(x) \geqslant \frac{8}{5}$.
2. On suppose dans cette question que $u_0 = 0$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \in [0,1]$.
   (b) Démontrer que $\forall n \geqslant 0, \quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{5}\,|u_n - 1|$
   (c) En déduire que $\forall n \geqslant 0, \quad |u_n - 1| \leqslant (\frac{2}{5})^n$.
   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   (e) Expliciter un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - 1| \leqslant 10^{-10}$.
3. On suppose dans cette question que $u_0 = 6$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \in]4,+\infty[$.
   (b) Justifier que $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} - 4 \geqslant \frac{8}{5}(u_n - 4)$.
   (c) Démontrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 4 + 2(\frac{8}{5})^n$.
   (d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. A partir de quel rang, est-on sur que $u_n \geqslant 10^7$?

Exercice 3
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2)$.

1. Soit $f : x \mapsto x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$.
   (a) Etudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
   (b) Montrer que $\forall x \in [1,2], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
   (c) Montrer que $f([1,2]) \subset [1,2]$.
2. Convergence de la suite.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et conclure.
   (d) A partir de quel rang a-t-on : $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$?
   (e) A l'aide d'une machine, donner une approximation à 10^{-9} près de $\sqrt{2}$.

Exercice 4
Soit u la suite définie par $u_0 \in [3;4]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \frac{ln\ u_n}{4}$.

1. Soit $f(x) = 4 - \frac{ln\ x}{4}$.
   (a) Etudier la fonction f et montrer que l'intervalle $[3;4]$ est stable par f.
   (b) Montrer que f possède un unique point fixe L sur l'intervalle $[3;4]$.
2. Convergence de la suite :
   (a) Montrer que $\forall x \in [3;4], \quad |\ f'(x)\ | \leqslant \frac{1}{10}$.
   En déduire que $|\ u_{n+1} - L\ | \leqslant \frac{1}{10}\ |\ u_n - L\ |$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\ u_n - L\ | \leqslant \frac{1}{10^n}\ |\ u_0 - L\ |$.
   En déduire le plus petit entier n tel que $|\ u_n - L\ | \leqslant 10^{-4}$.
   (c) A l'aide d'une machine, donner un encadrement de L.