**Exercice 1**

1. Soit $X$ une v.a.r suivant la loi uniforme sur $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. Soit $Y = X^2$
Déterminer la loi du couple $(X, Y)$. En déduire la loi de Y. Calculer $cov(X, Y)$.
Que peut-on en conclure ?
2. Mêmes questions avec $X(\Omega) = \{-2, -1, 1, 2\}$.

**Exercice 2**

La loi conjointe du couple $(X, Y)$ est donnée par :

| $X\backslash Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/20 | 1/4 | 0 |
| 1 | 17/60 | 1/4 | 1/6 |

Déterminer les lois marginales. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$ et $cov(X, Y)$. Conclusion ?

**Exercice 3**

La loi conjointe du couple $(X, Y)$ est donnée par :

| $X\backslash Y$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/4 | $a$ | 1/8 |
| 1 | 1/5 | $b$ | 1/10 |

.

Donner les lois de $X$ et $Y$. Déterminer $a$ et $b$ de manière que $X$ et $Y$ soient indépendantes.
Quelles seraient alors les lois conditionnelles de $X$ pour les différentes valeurs de $Y$ ?

**Exercice 4**

Soit $X$ une var discrète suivant la loi $\mathcal{U}_{[|3,6|]}$ et $Y$ la var définie par $Y = 2X^2 + 3$.
Calculer l'espérance et la variance de $X$ (resp. $Y$) puis déterminer la loi de $Y$.

**Exercice 5**

Soit $X$ une var prenant les valeurs $0, 1, 2$ et telle que : $P[X = 0] = a$, $P[X = 2] = a$.

1. Pour quelle valeur de $a$ définit-on ainsi une loi de probabilité ?
2. On suppose dorénavant que $a = \dfrac{1}{4}$. On introduit la var $Y$ telle que $Y = 2X - 1$.
$X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ? Calculer $E(X), V(X), \sigma(X)$ puis $E(Y), V(Y), \sigma(Y)$. Expliciter la loi de $Y$.

**Exercice 6**

Le jeu est le suivant : un plateau est constitué de 25 cases. Derrière 2 de ces cases se cache une bouteille de Champagne d'une valeur de $p$ francs. On mise 1 euro sur chacune des $n$ cases que l'on choisit et on gagne aucune, la ou les bouteilles correspondantes à ces cases. Soit $X_n$, $1 \leqslant n \leqslant 25$, la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles gagnées.

1. Déterminer la loi de probabilité de $X_n$ et son espérance $E(X_n)$ lorsque $n = 1$ et $n = 24$ et $n = 25$.
2. Faire la question précédente lorsque $2 \leqslant n \leqslant 23$
3. Chaque bouteille de Champagne veut $p$ euros. Soit $Y_n$, $1 \leqslant n \leqslant 25$, la variable aléatoire égale au gain résultant de ce jeu.
Exprimer $Y_n$ en fonction de $X_n$ et en déduire l'espérance de $Y_n$.

**Exercice 7**

On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de rois obtenus lorsque l'on tire les 5 cartes successivement avec remise.

1. Déterminer la loi de $X$ et son espérance.
2. Un jeu consiste à miser 2 euros et à recevoir $a$ euros par roi obtenu. Soit $G_X$ la variable aléatoire égale au gain en euro.
Exprimer $G_X$ en fonction de $X$ et de $a$ et calculer l'espérance de $G_X$. Pour quelles valeurs de $a$ le jeu est-il favorable au joueur ? Donner la loi de $G_X$.
3. Soit $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de rois obtenus lorsqu'il n'y a pas remise.
Déterminer la loi de $Y$ et son espérance $E(Y)$. Soit $G_Y$ la variable aléatoire égale au gain en euro. Exprimer $G_Y$ en fonction de $Y$ et de $a$. Pour quelles valeurs de $a$ le jeu est-il favorable au joueur ? Donner la loi de $G_Y$.

**Exercice 8**

$n$ boîtes sont numérotées de 1 à $n$ La boîte $n°k$ contient $k$ boules numérotées de 1 à $k$. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte Soient $X$ et $Y$ les numéros de la boîte et de la boule obtenus.
Loi du couple $(X, Y)$. Calculer $P(X = Y)$. Loi de $Y$, $E(Y)$.

**Exercice 9**

Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, $n$ fois chacun. On note $X, Y$ le nombre de 'pi1e' obtenus respectivement par A, B.

1. Pour tout k dans $\{1, .., n\}$, calculer la probabilité de l'événement : $(X = k)$ et $(Y = k)$.
2. En déduire la probabilité que $A$ et $B$ obtiennent le même nombre de fois "pile'.

**Exercice 10**

Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables indépendantes et de même loi, avec :
$P(X_i = 0) = \dfrac{1}{6}$, $P(X_i = 1) = \dfrac{1}{3}$, $P(X_i = 2) = \dfrac{1}{2}$. Soit $S = X_1 + X_2$, $\quad P = X_1 X_2$.
Donner la loi du couple $(S, P)$ puis celles de $S$ et $P$. $S$ et $P$ sont-elles indépendantes ?
Calculer $E(S)$, $E(P)$, $V(S)$, $V(P)$, $cov(S, P)$.

**Exercice 11**

1. Un dé cubique $D_1$ comporte 3 faces marquées 1, 2 faces marquées 2, 1 face marquée 3. On lance le dé $D_1$, on note $X_1$ le nombre obtenu.
Déterminer la loi de $X_1$ son espérance, sa variance.
2. Mêmes questions pour $X_2$ le nombre obtenu en lançant un dé $D_2$ comportant 3 faces marquées 4, 2 faces marquées 5, 1 face marquée 6.
3. On lance $D_1$ et $D_2$ simultanément, Calculer l'espérance de $Z = X_1 + X_2$.
Vérifier en déterminant la loi de $Z$.