Exercice 1
On considère une urne contenant quatre boules rouges et trois boules noires. On pioche une à une sans remise les boules de l'urne. Pour tout entier $i \in [\![1,3]\!]$On note X_i le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la $i^{ème}$ boule noire.

1. Donner la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
2. Expliciter la loi conjointe de (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
3. Calculer la covariance $cov(X_1, X_2)$.
4. On note T la variable aléatoire définie par $T = X_2 - X_1$.
   (a) Que represseente T ? Donner son espérance et sa variance.
   (b) Donner la loi conjointe de (T, X_1) puis la loi de T.
5. Donner la loi de X_3.

Exercice 2
On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées $3, 4, 5$ et 6.
On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : $1, 3, 2, 3, 5$.
   Quel est le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance mathématique $E(X_1)$.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
   Calculer la covariance du couple (X_1, X_2).
4. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^\times$, on a :
   $P(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{6}P(X_n = 1), \quad P(X_{n+1} = 6) = \dfrac{1}{6}P(X_n = 5)$
   $\forall k \in \{1, .., 5\}, \quad P(X_{n+1} = k) = \dfrac{7-k}{6}P(X_n = k-1) + \dfrac{k+1}{6}P(X_n = k+1).$
5. En déduire que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^\times$: $E(X_{n+1}) = \dfrac{2}{3}E(X_n) + 1$.
   Calculer alors $E(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$.

Exercice 3
Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geqslant 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p appartenant à $]0, 1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est q, avec $q = 1 - p$.

1. Soit X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels. Quelle est la loi de X ? Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2. Après ces n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   (b) Calculer $p_0 = P(Z = 0)$, $p_1 = P(Z = 1)$.
   Montrer que $p_1 = npq^{2n-2}(1 + q)$.
   (c) Calculer la probabilité conditionnelle $P((Y = h)/(X = k))$ pour $k \in \{0, .., n\}$ et $h \in \{0, .., n - k\}$.
   (d) Démontrer $P(Z = s) = \sum\limits_{k=0}^{s} P((X = k) \cap (Y = s - k))$.
   (e) Calculer $p_s = P(Z = s)$, vérifier que $C_n^k C_{n-k}^{s-k} = C_n^s C_s^k$.
   En déduire que $p_s = C_n^s [p(1 + q)]^s (q^2)^{n-s}$
   (f) Montrer que $q^2 = 1 - p(1 + q)$ et reconnaitre la loi suivie par Z