Exercice 1
Justifier que chacune des fonctions suivantes possède, sur l'intervalle considéré, une primitive puis expliciter l'unique primitive F satisfaisant à la condition donnée :

1. $a(x) = (x^2+1)(3-x)$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(0) = 1$.
2. $b(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(0) = \ln 2$.
3. $c(x) = 3(x^2-2x)\exp(x^3-3x^2)$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = 4$.
4. $d(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^5$ sur $\mathbb{R}$ avec $d(-1) = 1$
5. $e(x) = \dfrac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $F(2) = 1$.
6. $f(x) = \dfrac{4}{(3x-1)^2}\exp(\dfrac{2}{3x-1})$ sur $[1,+\infty[$ avec $F(1) = e$.

Exercice 2
Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :

$$I_1 = \int_{-1}^{1}(t+1)(t+2)^2dt,\quad I_2 = \int_0^4 \sqrt{x}\,(x-2\sqrt{x})\,dx,\quad I_3 = \int_1^2 3^x dx,$$
$$I_4 = \int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx,\quad I_5 = \int_0^1 (2x-1)\exp(x^2-x+1)dx,\quad I_6 = \int_1^2 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}}dt,$$
$$I_7 = \int_0^2 \frac{(\ln t)^5}{t}dt,\quad I_8 = \int_1^2 \frac{2\sqrt{x}}{2+3x\sqrt{x}}dx,\quad I_9 = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

Exercice 3
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties :

$$I = \int_{-1}^{1} xe^{3x}dx,\quad J = \int_0^1 (x^2+x)e^{2x}dx\quad K_n = \int_1^e t^n \ln t dt,\quad L = \int_e^{\sqrt{e}} \frac{\ln t}{t}dt,$$
$$M = \int_1^4 \sqrt{x}\ln x,\quad N = \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^3}dt,\quad O = \int_1^{e^2} (x^3+1)\ln(x)dx$$

Exercice 4
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$. Calculer l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_a^{1/a} \frac{\ln x}{x}dx$

a) par intégration par partie b) en posant le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$

Exercice 5
Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

a) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{3x+1}dx$ $(u = 3x+1)$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x^3+1)}$ $(u = x^3+1)$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ $(u = e^x)$, d) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln t}{t}dt$ $(x = \ln t)$, e) $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^e (\ln t)^2\, dt$ $(x = \ln t)$

Exercice 6
Vérifier : $\forall x \in [0,+\infty[,\quad 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

En déduire un encadrement de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$ et donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 7
On pose $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{x}{1+x^3}dx$.

1. Montrer que $\forall x \in [1,+\infty[,\quad \dfrac{1}{2x^2} \leqslant \dfrac{x}{1+x^3} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et que $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n \leqslant 1$.

Exercice 8
On définit la fonction $f : [2,+\infty[\to \mathbb{R}, x \to f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

1. Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 2 : $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_2^n f(x)dx$.
   (a) Démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.
   (b) On définit la fonction $F : [2,+\infty[\to \mathbb{R}, x \to \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.
   Calculer la dérivée de F, et en déduire une expression de I_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de $I_n - \ln n$ quand n tend vers $+\infty$.