Exercice 1
Calculer les sommes suivantes
a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{5^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+5n}{5^n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}$,e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3^n}$,
f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}$ g) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n!}$, i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$.

Exercice 2
On considère deux variables X et Y telles que $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^{\times}$ et
$\forall i,j\in\mathbb{N}^{\times},\quad P(X=i \text{ et } Y=j)=p^{i+1}(1-p)^j+(1-p)^{i+1}p^j$.

1. Donner les lois de X et de Y.
2. Montrer que X et Y admettent des espérances et expliciter $E(X)$ et $E(Y)$.
3. Montrer $p\mapsto E(X)$ est minimale lorsque $p=\frac{1}{2}$ et donner cette valeur minimale.
4. On suppose $p\neq\frac{1}{2}$. A l'aide de $P(X=1\cap Y=1)$, montrer que X et Y sont dépendantes.
5. Etudier l'indépendance de X et Y lorsque $p=\frac{1}{2}$.

Exercice 3
Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue des tirages successifs en remettant à chaque fois la boule tirée. Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la $1^{ère}$ boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X et donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Soit Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la $2^{ème}$ boule blanche.
   (a) Déterminer la loi conjointe de (X,Y).
   (b) Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.
   (c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4
Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet $n°1$.

1. Calculer $P(X=k/N=n)$, $0\leqslant k\leqslant n$.
2. Justifier que $P(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(X=k/N=n)P(N=n)$
3. Montrer que $P(X=k)=e^{-\lambda}(\frac{1}{m})^k\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\frac{1}{m})^n\frac{\lambda^n}{n!}$
4. En déduire la loi de probabilité de X (on retrouvera une loi usuelle)
5. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 5
On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres.
La probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à $0,1$.
On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :
- N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés ;
- X est la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés ;
- Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état.

On a donc : $X+Y=N$.

1. Soit n un entier naturel ;
   calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité conditionnelle suivante : $P_{(N=n)}(X=k)$.
2. Donner la loi du couple (X,N), puis montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $0,5$.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Si i et j sont deux entiers naturels, calculer la probabilité : $P((X=i)\cap(Y=j))$.
5. X et Y sont-elles indépendantes ?