Exercice 1
Une pièce de monnaie amène pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par un joueur qui attend le 1^{er} pile mais qui décide de s'arrêter au bout de m lancers au plus $(m \in \mathbb{N}^{\times})$.

1. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de lancer nécessaire pour obtenir le 1^{er} pile. Déterminer la loi de X
2. Exprimer Y en fonction de X et de m.
3. Déterminer la loi de Y
4. Montrer que Y admet une espérance et calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 2
On considère deux joueurs A et B qui disposent chacun d'une pièce telle que la probabilité d'obtenir est $p \in]0,1[$. Chaque joueur lance autant de fois que nécessaire sa pièce jusqu'à l'obtention d'un pile. On note X_A (resp. X_B) le nombre de lancers nécessaires au joueur A (resp. B) à l'obtention de son premier pile.

1. Donner la loi de X_A et de X_B ainsi que leurs espérances et leurs variances.
2. Calculer la probabilité que les deux joueurs obtiennent leur premier pile après le même nombre de lancers, c'est-à-dire $P(X_A = X_B)$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^{\times}$. Calculer $P(X_B \geqslant k)$.
4. En déduire la probabilité que le joueur B fasse plus de lancers que le joueur A pour obtenir son premier pile, c'est-à-dire $P(X_B \geqslant X_A)$.

Exercice 3
On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.
On effectue une suite d'expérience aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne "pile" est a, et que la probabilité que la pièce B donne "pile" est b.
Soit X le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne "face" pour la première fois, et Y le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce b donne "face" pour la première fois.

1. Quelles sont les lois de probabilités de X et de Y ? Calculer $E(X)$.
   Trouver pour tout entier naturel k, la valeur de $P(X \geqslant k)$.
   On s'intéresse au nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que l'une au moins des pièces donne "face" pour la première fois.. Pour cela, on note M la var définie par
   $$M = \min(X, Y).$$
   Calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité $P(M \geqslant k)$. En déduire la loi de probabilité de M.
   Déterminer la probabilité que la pièce B ne donne pas "face" avant la pièce A, c'est-à-dire que $P(Y \geqslant X)$.
2. On note $U = X + Y$.
   Déterminer la loi de probabilité de U.
   Calculer, pour tout couple (j, k) d'entiers naturels, les probabilités conditionnelles
   $$P(Y = k/U = j).$$
3. On suppose désormais que $a = b$. On note $V = Y - X$.
   Calculer, pour tout entier naturel k et tout entier relatif r, la probabilité de l'évènement $(M = k \text{ et } V = r)$.
   Trouver la loi de probabilité de V. Les var M et V sont-elles indépendantes ?