Exercice 1
Que peut-on dire de la fonction $x \mapsto \int_0^x te^{2t}dt$? Calculer, pour x fixé, cette intégrale. En déduire une primitive de $x \mapsto xe^{2x}$.
Procéder de même pour les fonctions suivantes :

$$x \mapsto \int_0^x (t^2+t)e^t dt, \quad x \mapsto \int_1^x \frac{(\ln t)^5}{t}dt, \quad x \mapsto \int_{1/e}^x \frac{dt}{t\ln t}.$$

Exercice 2
On considère la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1. Donner le domaine de définition de F puis montrer que F est impaire..
2. Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$ et calculer sa dérivée.
   En déduire la monotonie de F.
3. En justifiant que $\forall t > 0, \quad \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$, montrer que $\forall x \geqslant 1, \quad \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \leqslant 1$.
4. En déduire que la fonction F admet une limite en $+\infty$. On note $L = \lim_{x\to+\infty} F$.
5. Une identité remarquable. On pose $G(x) = F(x) + F(\frac{1}{x})$.
   (a) Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et calculer G'. Que dire de G ?
   (b) En faisant tendre x vers $+\infty$, montrer que $L = 2F(1)$.

Exercice 3
On considère la fonction $F(x) = \int_2^x \frac{ds}{1-s^2}$.

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathcal{D}_F$ et expliciter F'.
3. Montrer que $\forall s \geqslant 2, \quad \frac{1}{1-s^2} \geqslant -\frac{4}{s^2}$.
   En déduire une minoration de F sur son domaine de définition.
4. Montrer que F admet une limite en $+\infty$.
5. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{1-s^2} = \frac{a}{1+s} + \frac{b}{1-s}$.
   En déduire l'expression explicite de F et retrouver le résultat de la question 4.

Exercice 4
On considère les fonctions $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ et $G(x) = \int_{1/x}^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est C^1 sur $\mathcal{D}_f$ et calculer F'.
3. Donner le domaine de définition de G.
4. Montrer que G est dérivable sur $\mathcal{D}_G$. Calculer G' et $G(1)$. En déduire G.
5. En effectuant le changement de variable $x = \frac{1}{t}$, retrouver la valeur de $G(x)$.

Exercice 5
On considère les fonctions $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+\sqrt{t}+1}}dt$.

1. Donner le domaine de définition de F.
2. La fonction F est-elle dérivable sur $\mathcal{D}_F$? Si oui, calculer F'.
3. Montrer que : $\forall t \geqslant 1 \quad \frac{1}{t+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^2+\sqrt{t}+1}} \leqslant \frac{1}{t}$.
4. Donner un encadrement de F et déterminer sa limite en $+\infty$.

Exercice 6
On considère la fonction numérique Φ définie par $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^2}}$.

1. Quel est le domaine de définition de Φ ?
2. Montrer que Φ est une fonction impaire
   (on utilisera un changement de variable adéquat)
3. Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad \frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant \Phi(x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.
   En déduire la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Justifier la dérivabilité de Φ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\Phi'(x)$.
   Dresser le tableau de variation de Φ.