Exercice 1
Parmi les espaces suivants, quels sont ceux qui sont des espaces vectoriels?

1. $A = \{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $a+b=1\}$.
2. $B = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\left\{\begin{array}{c} 2a-5b+c=0 \\ b+c=0 \end{array}\right. \}$
3. $C = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $\left\{\begin{array}{c} \alpha+\gamma-2\delta=-1 \\ \alpha+\beta+\delta=1 \\ 2\alpha-\beta+3\gamma=0 \end{array}\right. \}$
4. $D = \{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $a^2+b=0\}$.
5. $E = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $\left\{\begin{array}{c} 13a+12b+158c+12d=0 \\ a-2b-3c-4d=0 \end{array}\right. \}$.
6. $F = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\left\{\begin{array}{c} a-2b+c=0 \\ b-2a+c=0 \\ c-2b+a=0 \end{array}\right. \}$.
7. $G = \{X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 3X\}$.
8. $H = \{X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 4X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.
9. $H = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}\}$.
10. $J = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}\}$
11. $K = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}\}$.
12. Soit A une matrice 3×3 à coefficients réels et
$L = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $(A^2+2A+6I_3)X = 0_{3,1}\}$
13. Soient A une matrice 2×2 à coefficients réels, B une matrice colonne 2×1 à coefficients réels avec $B \neq 0_{2,1}$ et $M = \{X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = 2X + B\}$

Exercice 2
Ecrire les vecteurs X suivants comme combinaison linéaire de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$n=2$ et $X = \begin{pmatrix} 2a+3b \\ a \end{pmatrix}$, $n=3$ et $X = \begin{pmatrix} a+b-12c \\ 2b+3c \\ 3a-5c \end{pmatrix}$, $n=4$ et $X = \begin{pmatrix} 2a+3b \\ a-d \\ 2b+3c \\ +c+d \end{pmatrix}$

Exercice 3
On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que les vecteurs suivants sont combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_2.
$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$.
Est-ce le cas des vecteurs $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$?

Exercice 4
On considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que tout vecteur X de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de e_1,e_2,e_3.
2. Est-ce le cas si l'on considère seulement la famille e_1,e_2 ?
3. Est-ce le cas si l'on remplace e_3 par le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$?
4. Est-ce le cas si l'on choisit la famille $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 5
Déterminer parmi les familles suivantes, celles qui sont des bases de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
$\mathcal{B}_1 = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$, $\mathcal{B}_2 = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $\mathcal{B}_3 = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$
$\mathcal{B}_4 = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$, $\mathcal{B}_5 = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

Exercice 6
Montrer que $F = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} X = 2X\}$ est un espace vectoriel.
Donner une famille génératrice. Est-ce une base de F ?