correction de l'exercice 1

1. On considère les évènements A : " on obtient le 1 " et B " on obtient le 21 ". Il s'agit donc de calculer la probabilité de l'évènement $A \cup B$.

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A)+p(B)-p(A\cap B) = \frac{\binom{1}{1}\binom{20}{4}}{\binom{21}{5}} + \frac{\binom{1}{1}\binom{20}{4}}{\binom{21}{5}} - \frac{\binom{2}{2}\binom{19}{3}}{\binom{21}{5}} \\ &= \frac{1\times\frac{20\times19\times18\times17}{4!}}{\frac{20\times19\times18\times17\times16}{5!}} + \frac{1\times\frac{20\times19\times18\times17}{4!}}{\frac{20\times19\times18\times17\times16}{5!}} - \frac{1\times\frac{19\times18\times17}{3!}}{\frac{20\times19\times18\times17\times16}{5!}} = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités : *Etant donné que l'on pioche sans remise, on utilise les combinatoires. Pour les cas possibles, on choisit 5 cartes parmi 21 donc on a* $\binom{21}{5}$ *possibilités*
$\underline{p(A)}$: Pour les cas favorables, on doit choisir l'atout numéro 1 parmi le seul atout 1 !! ($\binom{1}{1}$ *choix) et les 4 autres atouts sont quelconques parmi les 20 restants (* $\binom{20}{4}$ *choix, en particulier, on peut obtenir le 21).*
$\underline{p(B)}$: même argumentaire
$\underline{p(A\cap B)}$: Pour les cas favorables, on doit choisir deux numéros 1 et 21 parmi les numéros 1 et 21 ($\binom{2}{2}$ *choix possibles) et les 3 autres atouts sont quelconques parmi les 19 restants (* $\binom{19}{3}$ *choix)*

2. On considère l'évènement D : " obtenir au moins un multiple de cinq ". Son évènement contraire est $\overline{D}$ " obtenir aucun multiple de cinq ". Il y a 4 numéros multiples de cinq parmi les 21 possibles (5,10,15,20) et pour les cas favorables concernant $\overline{D}$, on choisit 5 numéros parmi les $21-4=17$ non multiples de cinq, ce qui nous fait $\binom{17}{5}$ choix possibles

$$p(\overline{D}) = \frac{\binom{17}{5}}{\binom{21}{5}} = \frac{\frac{17\times16\times15\times14\times13}{5!}}{\frac{21\times20\times19\times18\times17}{5!}} = \frac{52}{171} \Rightarrow p(D) = 1-p(\overline{D}) = \frac{119}{171}$$

3. On introduit les deux évènements E " obtenir exactement un multiple de cinq " et F " obtenir exactement un multiple de 3 ". Il s'agit donc de calculer la probabilité $p(E\cup F)$

$$\begin{aligned} p(E\cup F) &= p(E)+p(F)-p(E\cap F) = \frac{\binom{4}{1}\binom{17}{4}}{\binom{21}{5}} + \frac{\binom{7}{1}\binom{14}{4}}{\binom{21}{5}} - \frac{\binom{3}{1}\binom{6}{1}\binom{11}{3}+\binom{1}{1}\binom{11}{4}}{\binom{21}{5}} \\ &= \frac{4\times\frac{17\times16\times15\times14}{4!}}{\frac{21\times20\times19\times18\times17}{5!}} + \frac{7\times\frac{14\times13\times12\times11}{4!}}{\frac{21\times20\times19\times18\times17}{5!}} - \frac{3\times6\times\frac{11\times10\times9}{3!}+1\times\frac{11\times10\times9\times8}{4!}}{\frac{21\times20\times19\times18\times17}{5!}} \\ &= \frac{4409}{6783} \end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités : Je ne traiterais que des cas favorables.
$\underline{E}$: On choisit un multiple de cinq parmi les 4 possibles ($\binom{4}{1}$ *choix possibles) et les quatre autres numéros sont choisis parmi les $21-4=17$ numéros non multiples de cinq (* $\binom{17}{4}$ *choix)*
$\underline{F}$: On choisit un multiple de cinq parmi les 7 possibles ($\binom{7}{1}$ *choix possibles, 3,6,9,12,15,18,21) et les quatre autres numéros sont choisis parmi les $21-7=14$ numéros non multiples de trois (* $\binom{14}{4}$ *choix)*
$\underline{E\cap F}$: Soit on choisit un multiple de cinq qui ne soit pas un multiple de trois ($\binom{3}{1}$ *choix possibles, 5, 10, 20), ainsi qu'un multiple de trois qui ne soit pas un multiple de cinq (* $\binom{6}{1}$ *choix, 3, 6, 9, 12, 18, 21) et les trois autres numéros sont choisis parmi les $21-10=11$ numéros non multiples de cinq ou de trois (* $\binom{11}{3}$ *choix parmi les numéros 1,2,4,7,8,11,13,14,16,17,19);*
Soit on choisit un numéro multiple à la fois de trois et cinq (en l'occurence le 15, $\binom{1}{1}$ *choix possible), ce choix nous donnant tout à la fois le multiple de 3 et le multiple de 5, et les quatre autres numéros sont choisis parme les $21-10=11$ numéros non multiples de cinq ou de trois (* $\binom{11}{4}$ *choix)*

correction de l'exercice 2

1. On introduit l'évènement A " obtenir 2 trèfles et 2 coeurs ".
Pour les cas possibles, on choisit sans remise 4 cartes parmi 32 ($\binom{32}{4}$ choix possibles) et pour les cas favorables, on choisit 2 trèfles parmi les 8 trèfles possibles ($\binom{8}{2}$ choix) et 2 coeurs parmi les 8 coeurs possibles ($\binom{8}{2}$ choix) donc

$$p(A) = \frac{\binom{8}{2}\binom{8}{2}}{\binom{32}{4}} = \frac{\frac{8\times7}{2!}\times\frac{8\times7}{2!}}{\frac{32\times31\times30\times29}{4!}} = \frac{98}{4495}$$

2. Dans le cas présent, on doit faire un choix ordonné, puisque l'on considère l'ordre d'arrivée des types de cartes. Pour les cas possibles, on choisit 4 cartes ordonnées distinctes parmi 32 (A_{32}^4 choix possibles) et pour les cas favorables, on choisit en premier deux cartes trèfles ordonnées distinctes (A_8^2 choix possibles) puis pour les deux dernières cartes, on choisit deux cartes coeurs ordonnées distinctes (A_8^2 choix possibles) donc

$$p(A) = \frac{A_8^2 \times A_8^2}{A_{32}^4} = \frac{(8 \times 7) \times (8 \times 7)}{32 \times 31 \times 30 \times 29} = \frac{49}{13\,485}$$

correction de l'exercice 3

1. Pour les cas possibles, on a 20 possibilités pour chaque lancer donc on a 20^7 possibilités pour les 7 lancers.
Pour les cas favorables, on a 20 possibilité le premier lancer, 19 pour le second (on ne peut obtenir le numéro déjà obtenu, 18 pour le troisième (on ne peut obtenir l'un des deux numéros précédents), ..., 14 pour le septième lancer.
Par conséquent, la probabilité recherchée est

$$p = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14}{20^7} = \frac{61\,047}{200\,000}$$

2. On introduit les évènements $(A_i)_{i \in \{1,20\}}$ et A définis respectivement par

- A_i : " obtenir uniquement le numéro i durant les 7 lancers " et
- A : " obtenir le même numéro durant les 7 lancers "

Il est immédiat que $A = \bigcup_{i=1}^{20} A_i$. L'union précédente étant disjointe, on en déduit que

$$p(A) = \sum_{i=1}^{20} p(A_i) = \sum_{i=1}^{20} \frac{1^7}{20^7} = \frac{1}{20^7} \times 20 = \frac{1}{20^6} = \frac{1}{64\,000\,000}$$

correction de l'exercice 4

Les pioches étant sans remise et disposant de 5 pioches, le nombre de cas possibles est $\binom{32}{5}$.

1. (a) Pour les cas favorables, on choisit 2 dix parmi les 4 possibles ($\binom{4}{2}$ choix possibles) ainsi que 3 cartes parmi les $32 - 4 = 28$ cartes qui ne sont pas des dix ($\binom{28}{3}$ choix) donc la probabilité recherchée est égale à

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{28}{3}}{\binom{32}{5}} = \frac{\dfrac{4 \times 3}{2!} \times \dfrac{28 \times 27 \times 26}{3!}}{\dfrac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5!}} = \frac{351}{3596}$$

(b) Pour les cas favorables, on choisit 3 rois parmi les 4 possibles ($\binom{4}{3}$ choix possibles) ainsi que 2 cartes parmi les $32 - 4 = 28$ cartes qui ne sont pas des rois ($\binom{28}{2}$ choix) donc la probabilité recherchée est égale à

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{28}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{4 \times \dfrac{28 \times 27}{2!}}{\dfrac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5!}} = \frac{27}{3596}$$

(c) Pour les cas favorables, on choisit 3 dames parmi les 4 dames possibles ($\binom{4}{3}$ choix possibles) ainsi que 2 sept parmi les 4 sept possibles ($\binom{4}{2}$ choix) donc la probabilité recherchée est égale à

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{4 \times \dfrac{4 \times 3}{2!}}{\dfrac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5!}} = \frac{3}{25\,172}$$

2. (a) Pour tout entier $i \in \{0, 1, 2\}$, on introduit l'évènement A_i : " la main contient exactement i dix ". On pose également A : " la main contient au plus deux dix " Il est immédiat que $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$ et, l'égalité étant disjointe, on en déduit que

$$p(A) = \sum_{i=0}^{2} p(A_i) = \sum_{i=0}^{2} \frac{\binom{4}{i}\binom{28}{5-i}}{\binom{32}{5}} = \frac{\binom{4}{0}\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{4}}{\binom{32}{5}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{3}}{\binom{32}{5}} = \frac{7137}{7192}$$

Justification des calculs de probabilités :
<u>$p(A_i)$</u> : *Pour les cas possibles, on choisit i cartes dix parmi les 4 disponibles ($\binom{4}{i}$ choix possibles) et, pour les $5-i$ autres cartes, on les choisit parmi les $32 - 4 = 28$ cartes non dix.*

(b) On introduit l'évènement B " la main contient au plus trois rois ". Son évènement contraire est $\overline{B}$ " la main contient exactement 4 rois " (elle ne peut en contenir plus de 4 et elle doit en contenir au moins 4). Il est alors immédiat que

$$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{\binom{4}{4}\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}} = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}} = \frac{7191}{7192}$$

Justification des calculs de probabilités :
$\underline{p(\overline{B})}$: *Pour les cas favorables, on choisit 4 rois parmi les 4 possibles (* $\binom{4}{4}$ *choix possibles) et 1 carte parmi les* $32 - 4 = 28$ *cartes non roi (* $\binom{28}{1}$ *choix possibles).*

3. (a) Remarquons pour commencer qu'obtenir exactement une paire de dix signifie que l'on a 2 ou 3 dix (en effet, 3 dix ne forment qu'une paire).
On introduit les évènements suivants

- A " la main contient exactement une paire ",
- A_2 :" la main contient exactement deux cartes de même type et 3 cartes de 3 types différents et différents du premier type "
- A_3 :" la main contient exactement trois cartes de même type et 2 cartes de 2 types différents et différents du premier type "

Par exemple, la main "2 dames, 1 dix, 1 valet, 1 roi" est une réalisation de A_2 et la main "3 dames, 1 dix, 1 valet " est une réalisation de A_3. Par contre, la main "2 dames, 2 dix, 1 roi" n'est une réalisation ni de A_2, ni de A_3.
L'évènement A est l'union disjointe des évènements A_2 et A_3 donc

$$p(A) = p(A_2 \cup A_3) = p(A_2) + p(A_3) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{32}{5}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{3}\binom{7}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{32}{5}} = \frac{528}{899}$$

Justification des calculs de probabilités :
$\underline{p(A_2)}$: *Pour les cas favorables, on choisit un type de carte parmi les huit possibles (* $\binom{8}{1}$ *choix possibles), on choisit deux cartes parmi les 4 du type choisi (* $\binom{4}{2}$ *choix possibles), ensuite on choisit 3 types de cartes parmi les 7 restants, et on choisit une carte parmi les 4 possibles dans chaque type (* $\binom{4}{1}$ *choix possibles dans les trois cas). Par conséquent, on a* $\binom{8}{1}\binom{4}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$ *choix possibles pour les cas favorables.*
Par exemple, si l'on souhaite obtenir comme main "2 dames, 1 dix, 1 valet, 1 roi", on choisit le type " dame ", on prend 2 cartes dans ce type, ensuite on choisit les types " dix ", " valet ", " roi ", et on prend une carte dans chacun de ces trois types.
$\underline{p(A_3)}$: *Pour les cas favorables, on choisit un type de carte parmi les huit possibles (* $\binom{8}{1}$ *choix possibles), on choisit trois cartes parmi les 4 du type choisi (* $\binom{4}{3}$ *choix possibles), ensuite on choisit 2 types de cartes parmi les 7 restants, et on choisit une carte parmi les 4 possibles dans chaque type (* $\binom{4}{1}$ *choix possibles dans les deux cas). Par conséquent, on a* $\binom{8}{1}\binom{4}{3}\binom{7}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$ *choix possibles pour les cas favorables.*
Par exemple, si l'on souhaite obtenir comme main "3 dames, 1 dix, 1 roi", on choisit le type " dame ", on prend 3 cartes dans ce type, ensuite on choisit les types " dix ", " roi ", et on prend une carte dans chacun de ces deux types.

(b) Pour obtenir au plus un pique, soit on obtient 0 pique, soit on en obtient un. On introduit naturellement les évènements

- A " la main contient au plus un pique "
- A_i " la main contient exactement i piques ", $i = 0$ ou 1

L'évènement A est l'union disjointe des évènements A_0 et A_1 donc

$$p(A) = p(A_0 \cup A_1) = p(A_0) + p(A_1) = \frac{\binom{8}{0}\binom{24}{5}}{\binom{32}{5}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{24}{4}}{\binom{32}{5}} = \frac{2277}{3596}$$

Justification des calculs de probabilités :
$\underline{p(A_i)}$: *Pour les cas favorables, on choisit i cartes parmi les 8 piques (* $\binom{8}{i}$ *choix possibles) et les* $5 - i$ *autres sont choisies parmi les* $32 - 8 = 24$ *cartes qui ne sont pas des pique (* $\binom{24}{5-i}$ *choix possibles)*

(c) On pourrait introduire deux ensembles C " la main contient exactement un as " et D " la main contient exactement deux piques " et calculer la probabilité $p(C \cap D)$. La seule formule à notre disposition est la formule du crible ($n = 2$!!) qui ramène le problème au calcul de la probabilité de $C \cup D$, ce qui nous avance guère. Il est plus judicieux d'écrire notre évènement comme l'union de plusieurs évènements disjoints dont la probabilité de chacun sera aisément calculable.
Il existe le cas litigieux où l'on obtient l'as de pique. On introduit par conséquent les évènements suivants

- A : " la main contient un as et deux piques exactement "
- B : " la main contient un as non pique et deux piques exactement "
- C : " la main contient deux piques dont l'as de pique et trois cartes qui ne sont ni des as, ni des piques " Remarquez que le fait d'avoir 2 piques dont l'as de pique permet d'avoir simultanément 2 piques et 1 as en 2 cartes !!!

Il est immédiat que A est l'union disjointe de B et C donc

$$p(A) = p(B \cup C) = p(B) + p(C) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}\binom{21}{2}}{\binom{32}{5}} + \frac{\binom{1}{1}\binom{7}{1}\binom{21}{3}}{\binom{32}{5}} = \frac{805}{7192}$$

Justification des calculs de probabilités :
$p(B)$: *Pour les cas favorables, on choisit un as parmi les 3 as non pique ($\binom{3}{1}$ choix possibles), puis on choisit 2 cartes piques parmi les 7 piques qui ne sont pas des as ($\binom{7}{2}$ choix possibles) et enfin, on choisit 2 cartes parmi les* $32-(8+4-1)=21$ *cartes non as et non piques (l'as de pique compte 2 fois) ($\binom{21}{2}$ choix possibles). On dispose donc de* $\binom{3}{1}\binom{7}{2}\binom{21}{2}$ *cas favorables*
$p(C)$: *Pour les cas favorables, on choisit un as parmi l'as de pique ($\binom{1}{1}$ choix possible), puis on choisit 1 carte pique parmi les 7 piques qui ne sont pas des as ($\binom{7}{1}$ choix possibles) et enfin, on choisit 3 cartes parmi les* $32-(8+4-1)=21$ *cartes non as et non piques (l'as de pique compte 2 fois) ($\binom{21}{3}$ choix possibles). On dispose donc de* $\binom{1}{1}\binom{7}{1}\binom{21}{3}$ *cas favorables.*

4. Pour qu'une main ne contiennent aucune paire, il faut et il suffit que les cinq cartes piochées appartiennent à 5 types distinctes. Par conséquent, pour les cas favorables, on choisit 5 types de cartes parmi les 8 possibles ($\binom{8}{5}$ choix possibles), dans chaque type, on choisit une carte parmi les 4 possibles ($\binom{4}{1}$ choix possibles pour chacun des cinq types) et la probabilité recherchée est égale à
$$\frac{\binom{8}{5}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{32}{5}} = \frac{256}{899}$$

correction de l'exercice 5

1. L'union n'étant pas disjointe (par exemple, l'évènement $A_1 \cap A_2$ se réalise lorsque l'on n'obtient que des 4), on doit utiliser la formule du crible de Poincarré

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_1\cap A_4) \\
&\quad -P(A_2\cap A_3)-P(A_2\cap A_4)-P(A_3\cap A_4)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_4) \\
&\quad +P(A_2\cap A_3\cap A_4)-P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{2}{4}\right)^n-\left(\frac{2}{4}\right)^n-\left(\frac{2}{4}\right)^n-\left(\frac{2}{4}\right)^n-\left(\frac{2}{4}\right)^n-\left(\frac{2}{4}\right)^n \\
&\quad +\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n-0 \\
&= 4\left(\frac{1}{4}\right)^n-6\left(\frac{2}{4}\right)^n+4\left(\frac{3}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités :
Pour les cas possibles, on a 4 possibilités pour chaque lancer, donc on a $\underbrace{4\times 4\times\cdots\times 4}_{n \text{ fois}} = 4^n$ *possibilités lors des* n *lancers.*
$P(A_i)$: *Pour les cas favorables, on doit choisir, à chaque lancer, n'importe quel des* 4 *numéros sauf le numéro i, donc on a* $\underbrace{3\times 3\times\cdots\times 3}_{n \text{ fois}} = 3^n$ *possibilités*
$P(A_i\cap A_j),\ i<j$: *Pour les cas favorables, on doit choisir, à chaque lancer, n'importe quel des* 4 *numéros sauf les numéros i et j, donc on a* $\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$ *possibilités*
$P(A_i\cap A_j\cap A_k),\ i<j<k$: *Pour les cas favorables, on doit choisir, à chaque lancer, n'importe quel des* 4 *numéros sauf les numéros i, j et k, donc on a* $\underbrace{1\times 1\times\cdots\times 1}_{n \text{ fois}} = 1^n = 1$ *possibilités*
$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)$: *l'évènement* $A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4$ *est impossible car, à chaque lancer, on ne peut obtenir les numéros* $1,2,3,4$ *!!!*

2. L'évènement $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ se réalise si et seulement l'un (au moins) des quatre numéros n'apparait pas au cours des n lancers donc son évènement contraire est " les quatres numéros sont apparus au moins une fois au cours des n

lancers ". Cela nous permet d'écrire

$$p_n = P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}) = 1-P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1-\left[4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 6\left(\frac{2}{4}\right)^n + 4\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 1-4\left(\frac{1}{4}\right)^n+6\left(\frac{2}{4}\right)^n-4\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

3. Il est immédiat que $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1$ (car les trois réels $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$ appartiennent à $]-1,1[$). Par conséquent, la probabilité d'obtenir les quatre numéros durant les n lancers se rapproche de plus en plus de 1 lorsque le nombre de tirages croit indéfiniment.

correction de l'exercice 6

Dans un jeux de 32 cartes, on tire sucessivement trois cartes sans les remettre dans le jeu. Calculer la probabilité que

1. les trois cartes soient des piques
2. la deuxième carte tirée est un trèfle
3. la seconde carte tirée est un roi et la troisième un as
4. la deuxième carte tirée est un valet et les deux autres sont des coeurs.