correction de l'exercice 1

a) On pose $(\mathcal{P}_n) : \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$

Initialisation $n=0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 2\times 0+1 = 1$ et $(0+1)^2 = 1^2 = 1$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$ et montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = ([n+1]+1)^2 = (n+2)^2$.

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \left[\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\right] + [2(n+1)+1] \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} (n+1)^2+2n+3 = n^2+2n+1+2n+3 = n^2+4n+4 = (n+2)^2$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

b) On pose $(\mathcal{P}_n) : n! \geqslant 2\times 3^{n-2}$

Initialisation $n=2$: $2! = 2$ et $2\times 3^{2-2} = 2\times 1 = 2$ donc $2! \geqslant 2\times 3^{2-2}$ (l'égalité impliquant l'inégalité au sens large !!) donc $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $n! \geqslant 2\times 3^{n-2}$ et montrons que $(n+1)! \geqslant 2\times 3^{(n+1)-2} = 2\times 3^{n-1}$. Pour commencer, rappelons que l'on suppose $n \geqslant 2$.

$$(n+1)! = (n+1)\times n! \underset{(\mathcal{P}_n)}{\geqslant} (n+1)\times 2\times 3^{n-2} \underset{n\geqslant 2}{\geqslant} (2+1)\times 2\times 3^{n-2} = 3\times 2\times 3^{n-2} = 2\times 3^{n-1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

c) On pose $(\mathcal{P}_n) : \sum\limits_{k=1}^{n} k\times 2^{k-1} = (n-1)2^n+1$

Initialisation $n=1$: $\sum\limits_{k=1}^{1} k\times 2^{k-1} = 1\times 2^{1-1} = 1$ et $(1-1)2^1+1 = 1$ donc $\sum\limits_{k=1}^{1} k\times 2^{k-1} = (1-1)2^1+1$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\sum\limits_{k=1}^{n} k\times 2^{k-1} = (n-1)2^n+1$ et montrons que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\times 2^{k-1} = ([n+1]-1)2^{n+1}+1 = n2^{n+1}+1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\times 2^{k-1} = \left[\sum_{k=1}^{n} k\times 2^{k-1}\right] + (n+1)2^{n+1-1} \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} [(n-1)2^n+1]+(n+1)2^n = 2^n[n-1+n+1]+1 = 2^n\times 2n+1 = 2^{n+1}n+1$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

d) On pose $(\mathcal{P}_n) : \dfrac{3^n}{n!} \leqslant (\dfrac{1}{2})^n$

Initialisation $n=5$: Pour commencer, on a $\dfrac{3^5}{5!} = \dfrac{81}{40}$ et $3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5-5} = 3$. donc $\dfrac{3^5}{5!} \leqslant 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5-5}$ donc $(\mathcal{P}_5)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\dfrac{3^n}{n!} \leqslant 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-5}$ et montrons que $\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(n+1)-5} = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-4}$. Pour commencer, rappelons que l'on suppose $n \geqslant 5$.

$$\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3^n}{n!}\times\frac{3}{n+1} \underset{(\mathcal{P}_n)}{\leqslant} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\times\frac{3}{n+1} \underset{n\geqslant 5}{\leqslant} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\times\frac{3}{5+1} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\times\frac{1}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

correction de l'exercice 2

1. $\underline{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t}$: Pour cela, on introduit les fonctions $f : t \mapsto \ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t}$ et $g : t \mapsto t - \ln(1+t)$ définies sur $[0,+\infty[$ et on étudie leurs variatiosn respectives sur cet intervalle puis on en déduit le signe (si l'on a de la chance)

   Ces deux fonctions sont dérivables sur $[0,+\infty[$ et l'on a

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(1+t)'}{1+t} - \frac{(t)'(1+t)-t(1+t)'}{(1+t)^2} = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1+t-1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} \\ g'(t) &= 1 - \frac{(1+t)'}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \end{aligned}$$

Par conséquent, les dérivées de ces deux fonctions sont positives sur $[0,+\infty[$ et les fonctions f et g sont croissantes sur cet intervalle. Etant donné que $f(0)=g(0)=0$, on en déduit que les fonctions f et g sont positives sur $[0,+\infty[$, ce qui démontre l'encadrement demandé.

$\forall n\in\mathbb{N}^\times,\ \dfrac{a}{1+\frac{a}{n}}\leqslant \ln u_n\leqslant a$: Puisque l'on a $\ln u_n = n\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)$ puis en utilisant l'encadrement précédent pour $t=\dfrac{a}{n}$ et en le multipliant par n (qui est positif), on a

$$\frac{\frac{a}{n}}{1+\frac{a}{n}}\leqslant \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\leqslant\frac{a}{n}\underset{\times n}{\Leftrightarrow}\frac{a}{1+\frac{a}{n}}\leqslant n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\leqslant a\Leftrightarrow\frac{a}{1+\frac{a}{n}}\leqslant\ln u_n\leqslant a$$

2. Puisque l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a}{1+\frac{a}{n}}=a$, le théorème d'encadrement peut être appliqué à l'encadrement de la question précédente, ce qui montre que la suite $(\ln u_n)_n$ converge vers a donc, en passant à l'exponentielle, la suite $(u_n)_n$ converge vers e^a.

correction de l'exercice 3

1. $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n$ existe et $u_n\geqslant 1$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: u_n existe et $u_n\geqslant 1$.
Initialisation $n=0$: Puisque $u_0=2$, il est évident que u_0 existe (sic) et que $u_0\geqslant 1$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que u_n existe et que $u_n\geqslant 1$ et montrons que u_{n+1} existe et que $u_{n+1}\geqslant 1$. Puisque u_n existe et $u_n\geqslant 1$, on est assuré de l'existence de $\sqrt{u_n}$ donc de l'existence de u_{n+1}. En outre, l'inégalité suivante
$$u_{n+1}=2\sqrt{u_n}-1\geqslant 2\sqrt{1}-1=2-1=1$$
montre que $u_{n+1}\geqslant 1$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
Monotonie de la suite u : on étudie le signe de la différence u_n-u_{n+1} comme nous l'indique l'énoncé
$$u_n-u_{n+1}=u_n-(2\sqrt{u_n}-1)=u_n-2\sqrt{u_n}+1=(\sqrt{u_n}-1)^2\geqslant 0$$
ce qui montre que $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n-u_{n+1}\geqslant 0\Leftrightarrow u_n\geqslant u_{n+1}$, donc la sutie u est décroissante.

2. La suite u est décroissante et minorée par 1 donc, d'après le théorème de convergence monotone des suites, elle converge et l'on note L sa limite. La suite u étant minorée par 1, on en déduit que sa limite L est également minorée par 1, donc elle est strictement positive et la suite $\sqrt{u_n}$ converge vers $\sqrt{L}$. En outre, puisque pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}=2\sqrt{u_n}-1$, en passant à la limite, on obtient
$$L=2\sqrt{L}-1\Leftrightarrow L-2\sqrt{L}+1=0\Leftrightarrow(\sqrt{L}-1)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{L}=1\underset{L\geqslant 0}{\Leftrightarrow}L=1$$
Par conséquent, la suite u converge vers 1.

correction de l'exercice 4

1. $\forall n\geqslant 0,\quad u_n$ existe et $u_n\geqslant 0$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: u_n existe et $u_n\geqslant 0$.
Initialisation $n=0$: Puisque $u_0\geqslant 0$, il est évident que u_0 existe (sic) et que $u_0\geqslant 0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que u_n existe et que $u_n\geqslant 0$ et montrons que u_{n+1} existe et que $u_{n+1}\geqslant 0$. Puisque u_n existe et $u_n\geqslant 0$, on est assuré que le dénominateur $1+5u_n$ n'est pas nul (car il est supérieur à 1) donc le quotient $\dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$ existe, ce qui assure l'existence de u_{n+1}. En outre, le réel u_{n+1} est positif comme quotient de deux réels positifs, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
Monotonie de la suite u : on étudie le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$.
$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n^2}{1+5u_n}-u_n=\frac{2u_n^2-u_n(1+5u_n)}{1+5u_n}=\frac{-3u_n^2-u_n}{1+5u_n}\leqslant 0$$
Le réel u_n étant positif, cette différence est négative comme quotient d'un numérateur négatif et d'un dénominateur positif. Par conséquent, la suite u est décroissante.

2. La suite u est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de convergence monotone des suites, elle converge. Si l'on note L sa limite, la suite u étant positive, on est assuré que sa limite L est également positive donc le quotient

$1+5L$ est strictement positif donc il est non nul. Par conséquent, la suite $\frac{2u_n^2}{1+5u_n}$ tend vers $\frac{2L^2}{1+5L}$. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+5u_n}$, on en déduit que

$$L = \frac{2L^2}{1+5L} \Leftrightarrow L(1+5L) = 2L^2 \Leftrightarrow L + 5L^2 = 2L^2 \Leftrightarrow L - 3L^2 = 0 \Leftrightarrow L(1+3L) = 0 \Leftrightarrow L \in \left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}$$

Etant donné que la limite L est positive, on en déduit que $L = 0$ et la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{2u_n}{5}$: On ne procède pas par récurrence mais par un calcul direct (étant donné qu'il s'agit de deux termes consécutifs d'une même suite qui interviennent).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n = \frac{2u_n^2}{1+5u_n} - \frac{2}{5}u_n = \frac{5 \times 2u_n^2 - 2u_n(1+5u_n)}{5(1+5u_n)} = \frac{10u_n^2 - 2u_n - 10u_n^2}{5(1+5u_n)} = -\frac{2u_n}{5(1+5u_n)} \leqslant 0$$

car le réel u_n est positif pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ donc l'inégalité $u_{n+1} \leqslant \frac{2u_n}{5}$ est vraie.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant (\frac{2}{5})^n u_0$: On procède par récurrence (car il s'agit d'une relation entre la suite u et une autre suite) en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \leqslant (\frac{2}{5})^n u_0$.

Initialisation $n = 0$: $\left(\frac{2}{5}\right)^0 u_0 = u_0$ donc $u_0 \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^0 u_0$ (l'égalité impliquant l'inégalité au sens large), ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que $u_n \leqslant (\frac{2}{5})^n u_0$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant (\frac{2}{5})^{n+1} u_0$. En combinant l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$ à l'inégalité $u_{n+1} \leqslant \frac{2u_n}{5}$, on obtient

$$u_{n+1} \leqslant \frac{2u_n}{5} \leqslant \frac{2}{5}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n u_0\right] = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} u_0$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

Convergence de la suite u : La positivité de la suite u (question 1) combinée à la question précédente nous montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$$

La suite géométrique $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n u_0\right]_n$ converge vers 0 car sa raison $\frac{2}{5}$ appartient à $]-1,1[$, ce qui nous permet d'appliquer le théorème d'encadrement donc la suite u converge vers 0.

correction de l'exercice 5

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$ puis déterminer la monotonie de la suite u.
$\forall n \geqslant 0, \quad u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$.
Initialisation $n = 0$: Puisque $u_0 = 3$, il est évident que u_0 existe (sic) et que $u_0 \geqslant 1$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que u_n existe et que $u_n \geqslant 1$ et montrons que u_{n+1} existe et que $u_{n+1} \geqslant 0$. Puisque u_n existe et $u_n \geqslant 1$, on a la minoration suivante

$$2u_n - 1 \geqslant 2 \times 1 - 1 = 1$$

qui nous assure que le dénominateur $2u_n - 1$ n'est pas nul (car il est supérieur à 1) donc le quotient $\frac{u_n^2}{2u_n - 1}$ existe, ce qui assure l'existence de u_{n+1}.
Pour justifier que le réel u_{n+1} est supérieur (au sens large) à 1, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - 1$ (car l'application direct des encadrements ne nous permet pas de conclure)

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - 1 = \frac{u_n^2 - (2u_n - 1)}{2u_n - 1} = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n - 1} = \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1} \geqslant 0$$

car le numérateur est clairement positif et le dénominateur l'est également pour les raisons mentionnées ci-dessus, donc $u_{n+1} \geqslant 1$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

Monotonie de la suite u : on étudie le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{2u_n-1}-u_n=\frac{u_n^2-u_n(2u_n-1)}{2u_n-1}=\frac{-u_n^2+u_n}{2u_n-1}\underset{u_n\geqslant 1}{=}\frac{\overbrace{u_n}^{\geqslant 0}\overbrace{(-u_n+1)}^{\leqslant 0}}{\underbrace{2u_n-1}_{\geqslant 0}}\leqslant 0$$

donc la suite u est décroissante.

2. La suite u est décroissante et minorée par 1 donc, d'après le théorème de convergence monotone des suites, la suite u converge. Si l'on note L sa limite, on est assuré que $L\geqslant 1$ (par minoration de u_n) et la suite $2u_n-1$ tend vers $2L-1$ qui ne peut être nul (sinon $L=\frac{1}{2}$, ce qui est contradictoire). En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1}=\frac{u_n^2}{2u_n-1}$, on obtient
$$L=\frac{L^2}{2L-1}\Leftrightarrow L(2L-1)=L^2\Leftrightarrow L^2-L=0\Leftrightarrow L(L-1)=0\Leftrightarrow L\in\{0,1\}$$
Puisque la limite L est nécessairement supérieure ou égale à 1, on en déduit que $L=1$ et la suite $(u_n)_n$ converge vers 1.

correction de l'exercice 6

1. $\forall n\geqslant 0,\quad u_n$ existe et $u_n\geqslant\frac{1}{3}$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: u_n existe et $u_n\geqslant\frac{1}{3}$.

Initialisation $n=0$: Puisque $u_0=1$, il est évident que u_0 existe (sic) et que $u_0\geqslant\frac{1}{3}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que u_n existe et que $u_n\geqslant\frac{1}{3}$ et montrons que u_{n+1} existe et que $u_{n+1}\geqslant\frac{1}{3}$. Puisque u_n existe et $u_n\geqslant\frac{1}{3}$, on a l'encadrement suivant
$$3u_n+1\geqslant 3\times\frac{1}{3}+1=2$$
qui nous assure que le dénominateur $3u_n+1$ n'est pas nul donc le quotient $\frac{2u_n}{3u_n+1}$ existe, ce qui assure l'existence de u_{n+1}.

Pour justifier l'encadrement du réel u_{n+1}, on étudie le signe de la différence $u_{n+1}-\frac{1}{3}$ (car l'application direct des encadrements ne nous permet pas de conclure)

$$u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{2u_n}{3u_n+1}-\frac{1}{3}=\frac{3\times 2u_n-(3u_n+1)}{3(3u_n+1)}=\frac{3u_n-1}{3(3u_n+1)}=\frac{3\left(u_n-\frac{1}{3}\right)}{3(3u_n+1)}\geqslant 0\quad (u_n\geqslant\frac{1}{3})$$

donc l'égalité $u_{n+1}\geqslant\frac{1}{3}$est vraie, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

2. $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}\leqslant\frac{u_n}{2}+\frac{1}{6}$: On ne procède pas par récurrence mais par un calcul direct (étant donné qu'il s'agit de deux termes consécutifs d'une même suite qui interviennent).

$$\begin{aligned}u_{n+1}-\frac{u_n}{2}-\frac{1}{6}&=\frac{2u_n}{3u_n+1}-\frac{u_n}{2}-\frac{1}{6}=\frac{6\times 2u_n-3(3u_n+1)u_n-(3u_n+1)}{6(3u_n+1)}=\frac{-9u_n^2+6u_n-1}{6(3u_n+1)}\\&=-\frac{9u_n^2-6u_n+1}{6(3u_n+1)}=-\frac{(3u_n-1)^2}{6(3u_n+1)}\leqslant 0\end{aligned}$$

car le réel u_n est positif pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ donc l'inégalité $u_{n+1}\leqslant\frac{u_n}{2}+\frac{1}{6}$ est vraie.

$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 2^{n-1}}$: On procède par récurrence (car il s'agit d'une relation entre la suite u et une autre suite) en posant $(\mathcal{P}_n)$: $u_n\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 2^{n-1}}$.

Initialisation $n=0$:$\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 2^{0-1}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 2^{-1}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ et $u_0=1$ donc $u_0\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 2^{0-1}}$ (l'égalité impliquant l'inégalité au sens large), ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que $u_n \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 2^{n-1}}$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 2^n}$. En combinant l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$ à l'inégalité $u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2} + \frac{1}{6}$, on obtient

$$u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2} + \frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 2^{n-1}}\right] + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3 \times 2 \times 2^{n-1}} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 2^n}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

3. En combinant les encadrements issus des questions 1 et 2, on obtient l'encadrement suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 2^{n-1}}$$

Puisque $\lim_{n \to +\infty} \left[u_n \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 2^{n-1}}\right] = \frac{1}{3}$, le théorème d'encadrement nous montre que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{3}$.

correction de l'exercice 7

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Initialisation $n = 0$: Comme $u_0 = 1$, on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$, ce qui montre $(\mathcal{P}_0)$.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. En utilisant l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$ ainsi que des calculs sur les inégalités, on obtient

$$0 \leqslant u_n \leqslant 2 \Rightarrow 2 \leqslant u_n + 2 \leqslant 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leqslant \sqrt{u_n + 2} \leqslant \sqrt{4} \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
Soit L une limite éventuelle de la suite u. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 2$, on est assuré que $0 \leqslant L \leqslant 2$ donc le réel $L+2$ est positif et la suite $\sqrt{u_n + 2}$ converge vers $\sqrt{L+2}$. En considérant la relation de récurrence définissant la suite u et en passant à la limite, on obtient

$$L = \sqrt{L+2} \Rightarrow L^2 = L + 2 \Leftrightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Leftrightarrow L \in \{-1, 2\}$$

Puisque $L \geqslant 0$, on en déduit que $L = 2$ et la seule limite éventuelle de la suite u est 2.

2. <u>$\forall x \in [0,2],\ 2 - \sqrt{x+2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}(2-x)$</u> : On introduit la fonction $2 - \sqrt{x+2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(2-x)$

$$f : x \mapsto\ 2 - \sqrt{x+2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(2-x)$$

Elle est dérivable sur $[0,2]$ et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2} \geqslant 0 \quad \text{car } \sqrt{x+2} \geqslant \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f'(x) \geqslant -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \geqslant 0$$

On en déduit le tableau de variations de f sur $[0,2]$

x	0		2
$f'(x)$		+	
$f(x)$		$\nearrow$	0

et la fonction f est bien négative sur $[0,2]$ donc la majoration souhaitée est vraie.
<u>$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(2 - u_n)$</u> : Nous savons que

$$\forall x \in [0,2], \quad 2 - \sqrt{x+2} \leqslant \frac{2-x}{2\sqrt{2}}$$

et que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 2$, donc on peut remplacer x par u_n dans l'inégalité ci-dessus et en tenant compte que $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, on en déduit la majoration suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 - \sqrt{u_n + 2} \leqslant \frac{2 - u_n}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2 - u_{n+1} \leqslant \frac{2 - u_n}{2\sqrt{2}}$$

3. D'après la question 1, nous savons que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 2$ donc $2-u_n \geqslant 0$. Il reste donc à montrer que $2-u_n \leqslant \dfrac{2-u_0}{(2\sqrt{2})^n}$, ce que nous allons faire en procédant par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : 2-u_n \leqslant \dfrac{2-u_0}{(2\sqrt{2})^n}$.
Initialisation $n=0$: $\dfrac{2-u_0}{(2\sqrt{2})^0} = 2-u_0$ donc $2-u_0 \leqslant \dfrac{2-u_0}{(2\sqrt{2})^0}$ (l'égalité impliquant l'inégalité au sens large), ce qui montre $(\mathcal{P}_0)$
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que $2-u_n \leqslant \dfrac{2-u_0}{(2\sqrt{2})^n}$ et montrons que $2-u_{n+1} \leqslant \dfrac{2-u_0}{(2\sqrt{2})^{n+1}}$. En utilisant l'inégalité obtenue à la question 2 et l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$, on a
$$\left.\begin{array}{c} 0 \leqslant 2-u_{n+1} \leqslant \dfrac{2-u_n}{2\sqrt{2}} \\ 2-u_n \leqslant \dfrac{2-u_0}{(2\sqrt{2})^n} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant 2-u_{n+1} \leqslant \dfrac{\dfrac{2-u_0}{(2\sqrt{2})^n}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2-u_0}{(2\sqrt{2})^{n+1}}$$
ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

correction de l'exercice 8

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n > 0$.
Initialisation $n=0$: Puisque $u_0 > 0$, il est évident que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$. Puisque $u_n > 0$, on est assuré de l'existence de $\dfrac{1}{u_n}$ (donc de l'existence de u_{n+1}) et de la stricte positivité de $\dfrac{1}{u_n}$. La somme de deux réels strictement positifs est un réel strictement positif donc u_{n+1} est strictement positif, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

2. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$, on en déduit que la suite u est strictement croissante.
Soit L une limite éventuelle de u. Puisque la suite u est strictement positive, on est assuré que sa limite L est positive (au sens large) sans être assuré qu'elle soit strictement positive. Supposons que L soit strictement positive, alors la suite $\dfrac{1}{u_n}$ tend vers $\dfrac{1}{L}$ et en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$, on obtient
$$L = L + \frac{1}{L} \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{L}$$
Cette dernière égalité est impossible puisque L est un réel non nul. Par conséquent, si L est une limite éventuelle de u, cette limite est nécessairement nulle. D'autre part, nous savons que la suite est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_0$ et en passant à la limite, on en déduit que $L \geqslant u_0$ et comme u_0 est strictement positif, on est assuré que L est strictement positif, ce qui est contradictoire. Ainsi la suite u ne possède pas de limites éventuelles réelles (c'est-à-dire finie).

3. $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2}$: On pose $(\mathcal{P}_n) : u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$
Initialisation $n=0$: $2\times 0 + u_0^2 = u_0^2$ donc $u_0^2 \geqslant 2\times 0 + u_0^2$ (l'égalité impliquant l'inégalité au sens large), ce qui montre $(\mathcal{P}_0)$
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que $u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$ et montrons que $u_{n+1}^2 \geqslant 2(n+1) + u_0^2$.
$$u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \underset{(\mathcal{P}_n)}{\geqslant} 2n + u_0^2 + 2 + \underbrace{\frac{1}{u_n^2}}_{\geqslant 0} \geqslant 2n + 2 + u_0^2 = 2(n+1) + u_0^2$$
ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$: L'inégalité précédente combinée au fait que u_n soit positive nous montre que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \sqrt{2n + u_0^2}$$
et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n + u_0^2} = +\infty$, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

correction de l'exercice 9
Etudions pour commencer la monotonie de ces deux suites

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\left[\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\right]-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}\geqslant 0\\
b_{n+1}-b_n &= a_{n+1}+\frac{1}{(n+1)[(n+1)!]}-a_n-\frac{1}{n\times n!}=a_{n+1}-a_n+\frac{1}{(n+1)^2\times n!}-\frac{1}{n\times n!}\\
&= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)^2\times n!}-\frac{1}{n\times n!}=\frac{1}{(n+1)\times n!}+\frac{1}{(n+1)^2 n!}-\frac{1}{n\times n!}\\
&= \frac{n\times(n+1)+n-(n+1)^2}{n\times(n+1)^2\times n!}=\frac{-1}{n\times(n+1)^2\times n!}\leqslant 0
\end{aligned}$$

donc la suite a est croissante et la suite b est décroissante. Ensuite, il est immédiat que $\lim_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\times n!}=0$ donc les suites a et b sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite.
Remarque : *on peut montrer, par exemple en utilisant le calcul intégral, que la limite est le célèbre nombre e.*

correction de l'exercice 10

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : 0<u_n<v_n$.
   Initialisation $n=0$: puisque $u_0=a$ et $v_0=b$ avec $0<a<b$, on en déduit que $0<u_0<v_0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que $0<u_n<v_n$ et montrons que $0<u_{n+1}<v_{n+1}$.
   Pour commencer, puisque u_n et v_n sont strictement positifs, le réel u_{n+1} existe et est strictement positif (produit, somme et quotient de strictement positif est strictement positif). Ensuite, on a
   $$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}-\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}=\frac{(u_n+v_n)^2-4u_nv_n}{2(u_n+v_n)}=\frac{u_n^2-2u_nv_n+v_n^2}{2(u_n+v_n)}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$$
   Par conséquent, la différence $v_{n+1}-u_{n+1}$ est évidemment positive mais également non nul car les réels u_n et v_n sont distincts $(u_n<v_n)$ donc $v_{n+1}>u_{n+1}$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

2. Les monotonies souhaitées découlent des calculs suivants
   $$\begin{aligned}
   u_{n+1}-u_n &= \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}-u_n=\frac{2u_nv_n-u_n(u_n+v_n)}{u_n+v_n}=\frac{u_nv_n-u_n^2}{u_n+v_n}=\frac{\overbrace{u_n}^{>0}\overbrace{(v_n-u_n)}^{>0}}{\underbrace{u_n+v_n}_{>0}}>0\\
   v_{n+1}-v_n &= \frac{u_n+v_n}{2}-v_n=\frac{u_n-v_n}{2}<0
   \end{aligned}$$

3. $\underline{v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\frac{v_n-u_n}{2}}$: La première majoration découle de l'égalité obtenu à la question 1
   $$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}=\frac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)}=\frac{v_n-u_n}{2}\times\frac{v_n-u_n}{u_n+v_n}$$
   Puisque le numérateur v_n-u_n est clairement inférieur au dénominateur u_n+v_n, le quotient $\frac{v_n-u_n}{u_n+v_n}$ est inférieur (au sens largeà à 1 et comme il est positif, on en déduit que
   $$v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\frac{v_n-u_n}{2}$$
   $\underline{v_n-u_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)}$: Ensuite, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : v_n-u_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)$
   Initialisation $n=0$: $\left(\frac{1}{2}\right)^0(v_0-u_0)=v_0-u_0$ donc $v_0-u_0\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^0(v_0-u_0)$ (l'égalité impliquant l'inégalité au sens large) et $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que $v_n-u_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)$ et montrons que $v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(v_0-u_0)$. En utilisant l'inégalité $v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\frac{v_n-u_n}{2}$ et l'hypothèse $(\mathcal{P}_n)$ nous donne
   $$v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}(v_n-u_n)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(v_0-u_0)$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)}$: L'inégalité précédente combinée au fait que $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n<v_n$ nous montre que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0<v_n-u_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)$$

Puisque le réel $\frac{1}{2}$ appartient à $]-1,1[$, la suite géométrique $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)\right]_n$ tend vers 0, ce qui permet d'appliquer le théorème d'encadrement donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

4. La suite u est croissante, la suite v est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ donc les suites u et v sont adjacentes, ce qui impliquent qu'elles convergent vers la même limite.

5. Un calcul direct nous donne
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}v_{n+1}=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}\times\frac{u_n+v_n}{2}=u_nv_n$$
donc la suite (u_nv_n) est constante et cette constante est égale à $u_0v_0=ab$, c'est-à-dire
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_nv_n=ab$$
Si l'on note L la limite commune à u et v et en passant à la limite dans l'égalité précédente, on en déduit que $L^2=ab$ donc $L=\pm\sqrt{ab}$. Puisque les suites u et v sont positives, on en déduit que la limite L est également positive donc $L=\sqrt{ab}$.