correction de l'exercice 1

1. Existence et unicité de la solution de (E) sur $\mathbb{R}_-$:
On introduit la fonction g (puisque le nom f est déjà pris dans la question 2) définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x - (3+2x)$ et l'équation (E) est équivalente à l'équation $g(x) = 0$.
Justifions que la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur un intervalle à expliciter. Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (addition de fonctions C^1 de référence) et sa dérivée est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x - 2$. Sur $\mathbb{R}_-$, $e^x \leqslant 1$ ($x \leqslant 0$ donc $e^x \leqslant e^0 = 1$) donc $g'(x) \leqslant 1 - 2 = -1 < 0$ ce qui implique que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et comme elle est continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $f(\mathbb{R}_-)$. Puisque $g(0) = e^0 - (3 + 2\times 0) = -2$ et
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - \lim_{x\to-\infty}(3+2x) = 0 - (-\infty) = +\infty,$$
on en déduit que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $[-2,+\infty[$. Comme $0 \in [-2,+\infty[$, on est assuré que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une solution sur $\mathbb{R}_-$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g) donc l'équation (E) admet une et une seule solution.
$-2 < \alpha < -1$:Pour cela, on compare les images par g (puisque α est solution de l'équation $g(x) = 0$). On a :
$$\begin{aligned} g(-2) &= e^{-2} - (3 + 2\times(-2)) = e^{-2} + 1 > 0 \\ g(\alpha) &= 0 \qquad (\alpha \text{ est solution de } g(x) = 0) \\ g(-1) &= e^{-1} - (3 + 2\times(-1)) = e^{-1} - 1 < 0 \end{aligned}$$
ce qui permet d'écrire $g(-1) < g(\alpha) < g(-2)$ et comme la fonction g est bijective et strictement décroissante, on en déduit que $-2 < \alpha < -1$.
$\alpha = \dfrac{e^\alpha - 3}{2}$: Puisque α est solution de (E), on a :
$$e^\alpha = 3 + 2\alpha \Leftrightarrow e^\alpha - 3 = 2\alpha \Leftrightarrow \frac{e^\alpha - 3}{2} = \alpha$$

2. (a) $f(]-\infty,0]) \subset]-\infty,0]$: La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (puisque e^x l'est) donc son tableau de variation est donné par :

x	$-\infty$		0
$f(x)$	$-3/2$	$\nearrow$	-1

ce qui implique que $f(]-\infty,0]) =]-\dfrac{3}{2},-1] \subset]-\infty,0]$
$\forall x \in]-\infty,0], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$: La dérivée de f est donnée par :
$$\forall x \in]-\infty,0], \quad f'(x) = \frac{e^x}{2}$$
et
$$\forall x \in]-\infty,0], \quad 0 < f'(x) \leqslant \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$
(une exponentielle est toujours strictement positive) donc la distance de $f'(x)$ est moindre que la distance de $\dfrac{1}{2}$ à 0 ce qui implique que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(b) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $u_n \in]-\infty,0]$
Initialisation : $u_0 = -1 \in]-\infty,0]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in]-\infty,0]$ donc $f(u_n) \in]-\infty,0]$ (par stabilité de $]-\infty,0]$ par f, d'après la question 2.a)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in]-\infty,0]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(c) $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$: La question 1.c) combinée au fait que f est C^1 sur $]-\infty,0]$ permet d'utiliser l'inégalité des accroissements donc on a :
$$\forall x, y \in]-\infty,0], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$
En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $]-\infty,0]$) et $y = \alpha$ (qui appartient aussi à $]-\infty,0]$ d'après la question 1.a)) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$
$|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$: Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ ".
Initialisation : $|u_0 - \alpha| = |-1 - \alpha| \leqslant 1$ (puisque $\alpha \in [-2,-1]$, la distance entre α et -1 ne peut excéder la distance entre -2 et -1 donc elle est moindre que 1). Ensuite $\dfrac{1}{2^0} = 1$, on en déduit que $|u_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^0}$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et nous avons montré précédemment l'inégalité $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$ donc
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(d) Puisqu'une valeur absolue est toujours positive, on a : $0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et la suite $(\frac{1}{2^n})_n$ tendant vers 0, le théorème d'encadrement montre que $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, c'est-à-dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$ (la distance entre u_n et α tend vers 0)

(e) Il suffit de demander que $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9}$ (dans ce cas, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9}$) et l'on a

$$\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9} \Leftrightarrow n\ln(\frac{1}{2}) \leqslant -9\ln 10 \underset{\ln(\frac{1}{2})\leqslant 0}{\Leftrightarrow} n \geqslant -\frac{9\ln 10}{\ln(\frac{1}{2})}$$

Puisque $-\frac{9\ln 10}{\ln(\frac{1}{2})} \simeq 29.90 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 30.

Calcul de u_{30} par un tableur : On crée un tableau de la forme

	A	B
1	n	u
2		
3	n=0	-1
4	n=1	=(exp(B3)-3)/2
5	n=2	=(exp(B4)-3)/2
	⋮	⋮
33	n=30	=(exp(B32)-3)/2

Calcul de u_{30} avec Turbo-Pascal :

```
Program apha
uses crt;
var u :  real; n, k :  integer;
begin
u :  = -1;
for k=0 to 29 do u :  = (exp(u)-3)/2;
writeln('u(30) vaut ', u);
repeat until keypressed;
end.
```

Avec l'une ou l'autre méthode, on obtient $u_{30} = -1,373\,3745\,454$ donc

$$\boxed{\alpha \simeq -1,373\,3745\,454 \pm 10^{-9}}$$

Remarquons qu'avec le tableur (ou en Turbo, si l'on modifie le programme pour qu'il affiche tous les termes de la suite calculés), on constate que la valeur $-1,373\,3745\,454$ est obtenue dès le terme $n = 13$ et non $n = 30$. En fait, cela signifie que la majoration $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$ n'est pas optimale et que l'on pourrait améliorer cette majoration afin de minimiser le nombre de calculs.

correction de l'exercice 2

1. On introduit la fonction $g(x) = x - (2 - 2e^{-x}) = x - 2 + 2e^{-x}$ (puisque le nom f est déjà pris dans la question 2). L'équation $x = 2 - 2e^{-x}$ est alors équivalente à l'équation $g(x) = 0$.
   La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions C^1 de référence) et sa dérivée est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 1 - 2e^{-x}$. Déterminons le signe de g sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &< 0 \Leftrightarrow 1 - 2e^{-x} < 0 \Leftrightarrow 1 < 2e^{-x} \Leftrightarrow \ln 1 < \ln(2e^{-x}) \\ &\Leftrightarrow 0 < \ln(2) + \ln e^{-x} = \ln 2 - x \Leftrightarrow x < \ln 2 \end{aligned}$$

   On en déduit le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\underbrace{\ln 2 - 1}_{<0}$	$\nearrow$	$+\infty$

   Calcul $g(\ln 2)$: $g(\ln 2) = \ln 2 - 2 + 2e^{-\ln 2} = \ln 2 - 2 + \frac{2}{e^{\ln 2}} = \ln 2 - 2 + \frac{2}{2} = \ln 2 - 1 < 0$

   Calcul de $\lim_{x\to-\infty} g(x)$: lorsque $x \to -\infty$, $x \to -\infty$ (sic) et $e^{-x} \to +\infty$, à priori, l'exponentielle impose sa limite. Justifions proprement cette intuition. On a :

$$g(x) = 2e^{-x}(\frac{x}{2e^{-x}} - \frac{2}{e^{-x}} + 1) = \underbrace{2e^{-x}}_{\to+\infty}(\underbrace{\frac{xe^x}{2}}_{\to 0} - \underbrace{2e^x}_{\to 0} + 1)$$

   donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   Calcul de $\lim_{x\to+\infty} g(x)$: Puisque $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a directement $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Justification de l'existence de deux solutions : La fonction g admet une dérivée strictement négative sur $]-\infty, \ln 2]$ sauf en $\ln 2$ et comme elle est C^1 sur cet intervalle, elle est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln 2]$. En outre, elle y est continue donc elle réalise une bijection de $]-\infty, \ln 2]$ sur $[\ln 2 - 1, +\infty[$. Puisque $0 \in [\ln 2 - 1, +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution sur l'intervalle $]-\infty, \ln 2]$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g).
D'autre part, la fonction g admet une dérivée strictement positive sur $[\ln 2, +\infty[$ sauf en $\ln 2$ et comme elle est C^1 sur cet intervalle, elle est strictement décroissante sur $[\ln 2, +\infty[$. En outre, elle y est continue donc elle réalise une bijection de $[\ln 2, +\infty[$ sur $[\ln 2 - 1, +\infty[$. Puisque $0 \in [\ln 2 - 1, +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution sur l'intervalle $[\ln 2, +\infty[$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g)
En conclusion, l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions q et $r$sur $\mathbb{R}$, l'une, q, étant strictement inférieure à $\ln 2$ et l'autre, r, strictement supérieure à $\ln 2$. Justifions que la solution q est en fait négative (au sens large), ce qui démontrera l'unicité de la solution strictement positive. Il s'agit donc de comparer q et 0. Pour cela, on calcule les images : $g(q) = 0$ (puisque q est solution de $g(x) = 0$) et $g(0) = 0 - 2 + 2 = 0$ donc $g(q) = g(0)$ et comme 0 et q appartiennent à $]-\infty, \ln 2]$ et que g est bijective sur cette intervalle, on obtient que $q = 0$
$1.2 \leqslant r \leqslant 2$: On compare les images.

$$\begin{aligned} g(1.2) &= 1.2 - 2 + 2.e^{1.2} \simeq -0.8 + 0.60 \pm 10^{-2} \simeq -0.20 \pm 10^{-2} < 0 \\ g(r) &= 0 \qquad (r \text{ est solution de } g(x) = 0) \\ g(2) &= 2 - 2 + 2e^{-2} = 2e^{-2} > 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que : $g(1.2) < g(r) < g(2)$ et comme la fonction g est strictement croissante sur $[\ln 2, +\infty[$, on en déduit que $1.2 < r < 2$.

2. (a) La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}$ (comme addition de fonctions C^1 de référence) et sa dérivée est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\exp(-x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1, r]$. Par conséquent, le tableau de variations de f est

x	1		r
$f(x)$	$2(1-e^{-1})$	$\nearrow$	r

(en effet, r est solution de l'équation $x = 2-2e^{-x}$ donc $r = 2-2e^{-r} \Leftrightarrow r = f(r)$) ce qui implique que $f([1, r]) = [2(1-e^{-1}), r]$ et comme $2(1-e^{-1}) \simeq 1.26 \pm 10^{-2}$, on en déduit que $f([1, r]) \subset [1, r]$
Détermination du signe de $f(x) - x$ sur $[1, r]$: pour commencer, remarquons que $f(x) - x = -g(x)$. L'intervalle $[1, r]$ est inclu dans l'intervalle $[\ln 2, +\infty[$ donc le tableau de variations de g sur $[1, r]$ est donné par :

x	1		r
$g(x)$	$\underbrace{-1+2e^{-1}}_{<0}$	$\nearrow$	0

donc la fonction $f(x) - x$ est négative sur $[1, r]$

(b) $u_n \in [1, r]$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [1, r]$
Initialisation : $u_0 = 1 \in [1, r]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [1, r]$ donc $f(u_n) \in [1, r]$ (par stabilité de $[1, r]$ par f, d'après la question 2.a)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [1, r]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
Monotonie de u : On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ et comme $u_n \in [1, r]$ et que $f(x) - x$ est négative sur cet intervalle, on en déduit que $f(u_n) - u_n \leqslant 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ce qui implique la décroissance de la suite u.

(c) La suite u est décroissante et minorée par 1 (car $u_n \in [1, r]$) donc elle converge. On note L sa limite. Ensuite, par construction, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2(1 - \exp(-u_n))$ donc en passant à la limite, on a

$$L = 2(1 - \exp(-L)) \Leftrightarrow L = f(L) \Leftrightarrow g(L) = 0$$

Par conséquent, la limite L de la suite u est une solution de l'équation $g(x) = 0$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1, r]$, on en déduit que $L \in [1, r]$. Ainsi, L appartient à l'intervalle $[1, r] \subset]0, +\infty[$ et est solution de l'équation $g(x) = 0$. A la question 1. nous avons montré que la seule solution strictement positive de l'équation $g(x) = 0$ est r donc $L = r$ et la suite u converge vers r.

3. (a) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2e^{-x}$. Lorsque $x \in [1, r]$, on a

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant x \leqslant r \Rightarrow -r \leqslant -x \leqslant -1 \Rightarrow \exp(-r) \leqslant \exp(-x) \leqslant \exp(-1) \\ &\Rightarrow \underbrace{2\exp(-r)}_{>0} \leqslant f'(x) \leqslant 2\exp(-1) = \frac{2}{e} \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $x \in [1, r]$, la distance entre $f'(x)$ et 0 est moindre que la distance de $\frac{2}{e}$ à 0, c'est-à-dire à $\frac{2}{e}$ donc

$$\forall x \in [1, r], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{2}{e}.$$

La fonction f est de classe C^1 sur $[1,r]$ et l'inégalité précédente permet d'appliquer l'inégalité des acrroissements finis

$$\forall x,y \in [1,r], \quad |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{2}{e}|x-y|.$$

En évaluant cette inégalité en $x=u_n$ (qui appartient à $[1,r]$) et $y=r$ (qui appartient aussi à $[1,r]$!) puis en utilisant que $f(u_n)=u_{n+1}$, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}-r| \leqslant \frac{2}{e}|u_n-r|.$$

(b) Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n - r| \leqslant (\frac{2}{e})^n$ ".
Initialisation : $|u_0-r| = |1-r| \leqslant 1$ (puisque $r \in [1.2, 2]$, la distance entre 1 et r ne peut excéder la distance entre 1.2 et 2 donc elle est moindre que 0.8 donc moindre que 1). Ensuite $(\frac{2}{e})^0 = 1$, on en déduit que $|u_0 - r| \leqslant (\frac{2}{e})^0$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n - r| \leqslant (\frac{2}{e})^n$ et nous avons montré précédemment l'inégalité $|u_{n+1}-r| \leqslant \frac{2}{e}|u_n - r|$ donc

$$|u_{n+1}-r| \leqslant \frac{2}{e}|u_n-r| \leqslant \frac{2}{e} \times (\frac{2}{e})^n = (\frac{2}{e})^{n+1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(c) Il suffit de demander que $(\frac{2}{e})^n \leqslant 10^{-9}$ (dans ce cas, $|u_n - r| \leqslant (\frac{2}{e})^n \leqslant 10^{-9}$) et l'on a

$$(\frac{2}{e})^n \leqslant 10^{-9} \Leftrightarrow n\ln(\frac{2}{e}) \leqslant -9\ln 10 \underset{\ln(\frac{2}{e})\leqslant 0}{\Leftrightarrow} n \geqslant -\frac{9\ln 10}{\ln(\frac{2}{e})}$$

Puisque $-\dfrac{9\ln 10}{\ln(\frac{2}{e})} \simeq 67.53 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 68.

Calcul de u_{68} par un tableur : On crée un tableau de la forme

	A	B
1	n	u
2		
3	n=0	1
4	n=1	=2*(1-[exp(-B3))
5	n=2	=2*(1-[exp(-B4))
	⋮	⋮
71	n=68	=2*(1-[exp(-B67))

Calcul de u_{68} avec Turbo-Pascal :

```
Program r
uses crt;
var u :  real; n, k :  integer;
begin
u :  = 1;
for k=0 to 67 do u :  = 2*(1-exp(-u));
writeln('u(67) vaut ', u);
repeat until keypressed;
end.
```

Avec l'une ou l'autre méthode, on obtient $u_{68} = 1,593\,624\,260$ donc

$$\boxed{r \simeq 1,593\,624\,260 \pm 10^{-9}}$$

Remarquons qu'avec le tableur (ou en Turbo, si l'on modifie le programme pour qu'il affiche tous les termes de la suite calculés), on constate que la valeur $1,593\,624\,260$ *est obtenue dès le terme* $n=26$ *et non* $n=68$*. En fait, cela signifie que la majoration* $|u_n - r| \leqslant (\frac{2}{e})^n$ *n'est pas optimale et que l'on pourrait améliorer cette majoration afin de minimiser le nombre de calculs.*

correction de l'exercice 3

1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ (somme de fonctions C^1 de référence), sa dérivée est

$$\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(1-\frac{3}{x^2}) = \frac{x^2-3}{2x^2} = \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{2x^2}$$

Le tableau de variations de f est donc

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$			0			$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$				$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$				$+$		$+$	
$2x^2$		$+$		$+$		0		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$\|$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Le calcul de $f(-\sqrt{3})$ et $f(\sqrt{3})$ est laissé au lecteur, et que celui-ci n'oublie pas que $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

La fonction x^2 est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$1\leqslant\sqrt{3}\leqslant 2 \Longleftrightarrow 1^2\leqslant\sqrt{3}^2\leqslant 2^2 \Longleftrightarrow 1\leqslant 3\leqslant 4$$

Cet dernier encadrement étant vrai, on en déduit que $1\leqslant\sqrt{3}\leqslant 2$.

2. Le tableau de variation de f produit à la question précédente montre que $f([\sqrt{3},+\infty[)=[\sqrt{3},+\infty[\subset[\sqrt{3},+\infty[$ donc l'intervalle $[\sqrt{3},+\infty[$ est stable par f.
On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $u_n\in[\sqrt{3}+\infty[$
Initialisation : $u_0=2\in]\sqrt{3},+\infty[$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n\in[\sqrt{3},+\infty[$ donc $f(u_n)\in[\sqrt{3},+\infty[$ (par stabilité de $[\sqrt{3},+\infty[$ par f) donc $u_{n+1}=f(u_n)\in[\sqrt{3},+\infty[$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

3. $\underline{\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{3}\right|}$: La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par : $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{3}{x^2})$. La fonction f' est strictement croissante sur $[\sqrt{3},+\infty[$ (sa dérivée est strictement positive sur $[\sqrt{3},+\infty[$) et son tableau de variations est

x	$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	$1/2$

ce qui nous permet d'affirmer que

$$\forall x\in[\sqrt{3},+\infty[\qquad 0\leqslant f'(x)\leqslant\frac{1}{2}\Longrightarrow|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}$$

(la distance de $f'(x)$ à 0 est moindre que la distance de $\frac{1}{2}$ à 0, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}$)
La fonction f est de classe C^1 sur $[\sqrt{3},+\infty[$ et l'inégalité précédente permet d'appliquer l'inégalité des acrroissements finis

$$\forall x,y\in[\sqrt{3},+\infty[,\quad |f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|\,.$$

En évaluant cette inégalité en $x=u_n$ (qui appartient à $[\sqrt{3},+\infty[$) et $y=\sqrt{3}$ (qui appartient aussi à $[\sqrt{3},+\infty[$!) puis en utilisant que $f(u_n)=u_{n+1}$, on obtient que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{3}\right|.$$

$\underline{\left|u_n-\sqrt{3}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}}$: Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $\left|u_n-\sqrt{3}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$ ".
Initialisation : $\left|u_0-\sqrt{3}\right|=\left|2-\sqrt{3}\right|\leqslant 1$ (puisque $\sqrt{3}\in[1,2]$, la distance entre 2 et $\sqrt{3}$ ne peut excéder la distance entre 1 et 2 donc elle est moindre que 1). Ensuite $\dfrac{1}{2^0}=1$, on en déduit que $\left|u_0-\sqrt{3}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^0}$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $\left|u_n-\sqrt{3}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$ et nous avons montré précédemment l'inégalité $\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{3}\right|$ donc

$$\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{3}\right|\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

4. Puisqu'une valeur absolue est toujours positive, on a : $0\leqslant\left|u_n-\sqrt{3}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$ et la suite $(\dfrac{1}{2^n})_n$ tendant vers 0, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|u_n-\sqrt{3}\right|=0$, c'est-à-dire $u_n\underset{n\to+\infty}{\to}\sqrt{3}$ (la distance entre u_n et $\sqrt{3}$ tend vers 0)

5. Il suffit de demander que $\dfrac{1}{2^n}\leqslant 10^{-9}$ (dans ce cas, $\left|u_n-\sqrt{3}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}\leqslant 10^{-9}$) et l'on a

$$\frac{1}{2^n}\leqslant 10^{-9}\Leftrightarrow n\ln(\frac{1}{2})\leqslant -9\ln 10\underset{\ln(\frac{1}{2})\leqslant 0}{\Leftrightarrow} n\geqslant-\frac{9\ln 10}{\ln(\frac{1}{2})}$$

Puisque $-\dfrac{9\ln 10}{\ln(\frac{1}{2})} \simeq 29.90 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 30.

Calcul de u_{30} par un tableur : On crée un tableau de la forme

	A	B
1	n	u
2		
3	n=0	-1
4	n=1	=(1/2)*(B3+3/B3)
5	n=2	=(1/2)*(B4+3/B4)
	⋮	⋮
33	n=30	=(1/2)*(B32+3/B32)

Calcul de u_{30} avec Turbo-Pascal :

```
Program rac(3)
uses crt;
var u : real; n, k : integer;
begin
u : = 2;
for k=0 to 29 do u : = (u+3/u)/2;
writeln('u(30) vaut ', u);
repeat until keypressed;
end.
```

Avec l'une ou l'autre méthode, on obtient $u_{30} = 1,732\,050\,807$ donc

$$\boxed{\sqrt{3} \simeq 1,732\,050\,807 \pm 10^{-9}}$$

Remarquons qu'avec le tableur (ou en Turbo, si l'on modifie le programme pour qu'il affiche tous les termes de la suite calculés), on constate que la valeur $1,732\,050\,807$ *est obtenue dès le terme* $n = 4$ *et non* $n = 30$. *En fait, cela signifie que la majoration* $\left|u_n - \sqrt{3}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ *n'est pas optimale et que l'on pourrait améliorer cette majoration afin de minimiser le nombre de calculs.*

correction de l'exercice 4

1. On introduit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$. L'équation (E) est donc équivalente à l'équation $f(x) = 0$.
La fonction f est clairement C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$
Il s'agit d'un trinôme dont les racines sont -1 et 1. On en déduit immédiatement le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est strictement croissante et continue sur $]-\infty, -1]$ (la fonction est C^1 sur l'intervalle et sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle sauf en -1) donc elle réalise une bijection de $]-\infty, -1]$ sur $]-\infty, 3]$. Puisque $0 \in]-\infty, 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $]-\infty, -1]$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f sur $]-\infty, -1]$). On la note α.
La fonction f est strictement croissante et continue sur $[-1, 1]$ (la fonction est C^1 sur l'intervalle et sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle sauf en -1 et 1) donc elle réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-1, 3]$. Puisque $0 \in [-1, 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $[-1, 1]$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f sur $[-1, 1]$). On la note β.
La fonction f est strictement croissante et continue sur $[1, +\infty]$ (la fonction est C^1 sur l'intervalle et sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle sauf en 1) donc elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty]$. Puisque $0 \in]-1, +\infty]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $[1, +\infty[$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f sur $[1, +\infty[$). On la note γ.
Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions α, β, γ sur $\mathbb{R}$ avec $\alpha < -1$, $-1 < \beta < 1$ et $1 < \gamma$, c'est-à-dire
$$\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$$

2. (a) On compare les images par f (puisque β est solution de l'équation $f(x) = 0$
$$f(0) = 1, \qquad f(\beta) = 0, \qquad f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8}$$
donc $f(\frac{1}{2}) \leqslant f(\beta) \leqslant f(0)$. La fonction f étant bijective et strictement décroissante sur $[-1, 1]$, on en déduit que $0 \leqslant \beta \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Le réel β est solution de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ donc
$$\beta^3 - 3\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta^3 + 1 = 3\beta \Leftrightarrow \frac{\beta^3 + 1}{3} = \beta$$
donc β est solution de l'équation $\dfrac{x^3 + 1}{3} = x$.

(b) Le tableau de variation de g sur $[0, \frac{1}{2}]$ est

x	0		1/2
$g(x)$	1/3	$\nearrow$	3/8

donc $g\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{8}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

La dérivée de g est donnée par $g'(x) = x^2$ donc $\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \quad 0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{1}{4}$ (encadrement élémentaire). Par conséquent,

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \qquad |g'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$$

(la distance de $g'(x)$ à 0 est moindre que la distance de 0 à $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{4}$).

(c) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [0, \frac{1}{2}]$

Initialisation : $u_0 = 0 \in [0, \frac{1}{2}]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ donc $f(u_n) \in [0, \frac{1}{2}]$ (par stabilité de $[0, \frac{1}{2}]$ par f, d'après la question 2.a)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, \frac{1}{2}]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(d) $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \beta|$: La fonction f est de classe C^1 sur $[0, \frac{1}{2}]$ et l'inégalité de la question 2.bp permet d'appliquer l'inégalité des acrroissements finis

$$\forall x, y \in [0, \frac{1}{2}], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{4}|x - y|.$$

En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[0, \frac{1}{2}]$) et $y = \beta$ (qui appartient aussi à $[0, \frac{1}{2}]$) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \beta|.$$

$|u_n - \beta| \leqslant \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$: Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n - \beta| \leqslant \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$ ".

Initialisation : $|u_0 - \beta| = |0 - \beta| \leqslant \frac{1}{2}$ (puisque $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$, la distance entre 0 et β ne peut excéder la distance entre 0 et $\frac{1}{2}$ donc elle est moindre que $\frac{1}{2}$). Ensuite $\frac{1}{4^0} \times \frac{1}{2} = 1$, on en déduit que $|u_0 - \beta| \leqslant \frac{1}{4^0} \times \frac{1}{2}$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n - \beta| \leqslant \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$ et nous avons montré précédemment l'inégalité $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \beta|$ donc

$$|u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \beta| \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4^{n+1}} \times \frac{1}{2}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(e) Il suffit de demander que $\frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} \leqslant 10^{-9}$ (dans ce cas, $|u_n - \beta| \leqslant \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} \leqslant 10^{-9}$) et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} &\leqslant 10^{-9} \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}) \leqslant -9\ln 10 \Leftrightarrow n\ln(\frac{1}{4}) + \ln(\frac{1}{2}) \leqslant -9\ln 10 \\ n\ln(\frac{1}{4}) &\leqslant -9\ln 10 - \ln(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \underset{\ln(\frac{1}{4}) \leqslant 0}{\Leftrightarrow} n \geqslant \frac{-9\ln 10 - \ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{1}{4})} \end{aligned}$$

Puisque $\frac{-9\ln 10 - \ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{1}{4})} \simeq 14.45 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 15.

Calcul de u_{15} par un tableur : On crée un tableau de la forme

	A	B
1	n	u
2		
3	n=0	-1
4	n=1	=(1/3)*((B3)^3+1)
5	n=2	=(1/3)*((B4)^3+1)
	$\vdots$	$\vdots$
18	n=15	=(1/3)*((B17)^3+1)

Calcul de u_{30} avec Turbo-Pascal :

```
Program beta
uses crt;
var u :  real; n, k :  integer;
begin
u :  = 0;
for k=0 to 14 do u :  = (u^3+1)/3;
writeln('u(15) vaut ', u);
repeat until keypressed;
end.
```

Avec l'une ou l'autre méthode, on obtient $u_{30} = 0,347\,296\,355$ donc

$$\boxed{\beta \simeq 0,347\,296\,355 \pm 10^{-9}}$$

Remarquons qu'avec le tableur (ou en Turbo, si l'on modifie le programme pour qu'il affiche tous les termes de la suite calculés), on constate que la valeur $0,347\,296\,355$ *est obtenue dès le terme* $n = 10$ *et non* $n = 15$. *En fait, cela signifie que la majoration* $|u_n - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4^n} \times \dfrac{1}{2}$ *n'est pas optimale et que l'on pourrait améliorer cette majoration afin de minimiser le nombre de calculs.*