

correction de l'exercice 1

Le pivot est notre seul et unique ami pour la résolution des systèmes

$$1. \begin{cases} 2x + y + z = -5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2x + y + z = -5} \\ 12y - 8z = 4 \\ -3y + z = 7 \end{cases} \begin{array}{l} \text{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = -5 \\ \boxed{12y - 8z = 4} \\ -4z = 32 \end{cases} \begin{array}{l} \text{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -8 \\ y = \frac{8z + 4}{12} = -5 \\ x = \frac{-5 - y - z}{2} = 4 \end{cases}$$

le système admet une unique solution qui est $(4, -5, -8)$

$$2. \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ 4x - y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{3x + 2y + 2z = 1} \\ -11y + z = -7 \\ 11y - z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \text{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ \boxed{-11y + z = -7} \\ 0 = -6 \end{cases} \begin{array}{l} \text{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

La dernière égalité étant visiblement impossible, le système n'admet aucune solution.

$$3. \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2x + y = 2} \\ 3y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{2 - y}{2} = 1 \end{cases}$$

le système admet une unique solution qui est $(1, 0)$

$$4. \begin{cases} x + 3y - z + t = 1 \\ 2x + 13 - 7z + 2t = 2 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + 7y - 4z + t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x + 3y - z + t = 1} \\ 7y - 5z = 0 \\ -4y + 2z = -1 \\ 4y - 3z = -2 \end{cases} \begin{array}{l} \text{pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z + t = 1 \\ \boxed{7y - 5z = 0} \\ -6z = -7 \\ -z = -14 \end{cases} \begin{array}{l} \text{pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 7L_3 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow 7L_4 - 4L_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z + t = 1 \\ 7y - 5z = 0 \\ \boxed{-6z = -7} \\ 0 = -77 \end{cases} \begin{array}{l} \text{pivot pour } z \\ L_4 \leftarrow 6L_4 - L_3 \end{array}$$

La dernière égalité étant visiblement impossible, le système n'admet aucune solution.

$$5. \begin{cases} y + z + t = -1 \\ x + z + t = 0 \\ x + y + t = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + t = -1 \\ x + y + t = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} L_1 \leftrightarrow L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x + z + t = 0} \\ y + z + t = -1 \\ y - z = 1 \\ y - t = 2 \end{cases} \begin{array}{l} \text{pivot pour } x \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t = 0 \\ \boxed{y + z + t = -1} \\ -2z - t = 2 \\ -z - 2t = 3 \end{cases} \begin{array}{l} \text{pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + t = -1 \\ -2z - t = 2 \\ -3t = 4 \end{cases} \begin{array}{l} \text{pivot pour } z \\ L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{4}{3} \\ z = \frac{t + 2}{-2} = -\frac{1}{3} \\ y = -z - t - 1 = \frac{2}{3} \\ x = -z - t = \frac{5}{3} \end{cases}$$

le système admet une unique solution qui est $(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$

$$6. \begin{cases} 2x + y + z + t = -5 \\ 2x + 3y - 3z + t = -1 \\ x - y + z - t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2x + y + z + t = -5} & \text{pivot pour } x \\ 2y - 4z = 4 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -3y + z - 3t = 7 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z + t = -5 \\ \boxed{2y - 4z = 4} & \text{pivot pour } y \\ -10z - 6t = 26 & L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{26 + 6t}{-10} = -\frac{13}{5} - \frac{3}{5}t \\ y = \frac{4 + 4z}{2} = -\frac{16}{5} - \frac{6}{5}t \\ x = \frac{-5 - y - z - t}{2} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5}t \end{cases}$$

le système admet une infinité de solutions de la forme $(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}t, -\frac{16}{5} - \frac{6}{5}t, -\frac{13}{5} - \frac{3}{5}t, t)$ $t \in \mathbb{R}$

$$7. \begin{cases} u + w = 1 \\ v + w = 0 \\ u + v = 12 \\ u + 3v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{u + w = 1} & \text{Pivot pour } u \\ v + w = 0 & \\ v - w = 11 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 3v - w = -1 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + w = 1 \\ \boxed{v + w = 0} & \text{Pivot pour } v \\ -2w = 11 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ -4w = -1 & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u + w = 1 \\ v + w = 0 \\ \boxed{-2w = 11} & \text{Pivot pour } w \\ 0 = -23 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{cases}$$

La dernière égalité étant visiblement impossible, le système n'admet aucune solution.

$$8. \begin{cases} x + y - t = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ -y + z + t = 0 \\ x - z + t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x + y - t = 1} & \text{Pivot pour } x \\ -x + y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -y + z + t = 0 & \\ x - z + t = 1 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - t = 1 \\ 2y + z - t = 1 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -y + z + t = 0 & \\ -y - z + 2t = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - t = 1 \\ \boxed{2y + z - t = 1} & \text{Pivot pour } y \\ 3z + t = 1 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \\ -z + 3t = 1 & L_4 \leftarrow 2L_4 + L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - t = 1 \\ 2y + z - t = 1 \\ \boxed{3z + t = 1} & \text{Pivot pour } z \\ 10t = 4 & L_4 \leftarrow 3L_4 + L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ z = \frac{1 - t}{3} = \frac{1}{5} \\ y = \frac{1 - z + t}{2} = \frac{3}{5} \\ x = 1 - y + t = \frac{4}{5} \end{cases}$$

le système admet une unique solution qui est $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$

$$9. \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ -3x + y + z + t = -1 \\ x - 3y + z + t = -1 \\ x + y - 3z + t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x + y + z - 3t = 1} & \text{Pivot pour } x \\ 4y - 8z + 4t = 2 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ -4y + 4t = -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ -4z + 4t = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ \boxed{4y - 8z + 4t = 2} & \text{Pivot pour } y \\ -8z + 8t = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ -4z + 4t = 0 & \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 4y - 8z + 4t = 2 \\ \boxed{-8z + 8t = 0} & \text{Pivot pour } z \\ 0 = 0 & L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = t \\ y = \frac{2 + 8z - 4t}{4} = \frac{1}{2} + t \\ x = 1 - y - z + 3t = \frac{1}{2} + t \end{cases}$$

le système admet une infinité de solutions de la forme $(\frac{1}{2} + t, \frac{1}{2} + t, t, t)$ $t \in \mathbb{R}$

correction de l'exercice 2

On explicite l'égalité et on se ramène à la résolution d'un système, en utilisant que deux matrices sont égales si et seulement

si tous ses coefficients sont égaux. On pose $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+2c = a+3b \\ b+2d = 2a+4b \\ 3a+4c = c+3d \\ 3b+4d = 2c+4d \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -3b+2c = 0 \\ -2a-3b+2d = 0 \\ 3a+3c-3d = 0 \\ 3b-2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-3b+2d = 0 \\ -3b+2c = 0 \\ 3a+3c-3d = 0 \\ 3b-2c = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-3b+2d = 0 \\ -3b+2c = 0 \\ -9b+6c = 0 \\ 3b-2c = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } a \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_1 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \begin{cases} -2a-3b+2d = 0 \\ -3b+2c = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } b \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3}c \\ a = \frac{3b-2d}{-2} = -c+d \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice B vérifie l'égalité $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$B = \begin{pmatrix} -c+d & \frac{2}{3}c \\ c & d \end{pmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R}$$

correction de l'exercice 3

Un calcul direct montre que

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$A^2 - A = 2I \Leftrightarrow A(A - I) = 2I \Leftrightarrow A \left(\frac{A - I}{2} \right) = I$$

donc la matrice A est inversible et son inverse A^{-1} est égal à $\frac{A - I}{2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

correction de l'exercice 4

1. Je laisse au lecteur le soin de vérifier que

$$J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^4 = J^3 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc pour $k \geq 4$, $J^k = J^4 \times J^{4-k} = 0_4 \times J^{4-k} = 0_4$

2. On calcule directement :

$$(I + J)(I - J + J^2 - J^3) = I^2 - IJ + IJ^2 - IJ^3 + JI - J^2 + J^3 - J^4 = I - J + J^2 - J^3 + J - J^2 + J^3 - J^4 = I - J^4 = I$$

3. La question précédente montre que

$$\text{la matrice } (I + J) \text{ est inversible et que son inverse est } I - J + J^2 - J^3$$

ou, sous une forme plus explicite

$$(I + J)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

correction de l'exercice 5

1. On se lance directement dans le calcul :

$$N(a)N(b) = \begin{pmatrix} a+1 & -a & -a \\ a & -a+1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b+1 & -b & -b \\ b & -b+1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a+b & -a-b & -a-b \\ a+b & -b-a+1 & -a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N(a+b)$$

$$\boxed{\text{Pour tous réels } a \text{ et } b, \text{ on a } N(a)N(b) = N(a+b)}$$

Il est immédiat que

$$N(c) = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c+1 & -c & -c \\ c & -c+1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c+1 = 1 \\ -c = 0 \\ c = 0 \\ -c+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = 0$$

Ainsi, on peut écrire

$$N(a)N(b) = I_3 \Leftrightarrow N(a+b) = I_3 \Leftrightarrow a+b = 0 \Leftrightarrow b = -a$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la matrice } N(a) \text{ est inversible et son inverse est } N(-a), \text{ ce que l'on peut encore écrire } [N(a)]^{-1} = N(-a)}$$

2. Toujours par un calcul direct, on a :

$$\begin{aligned} M(a,b) + M(c,d) = M(\alpha, \beta) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} a+c = \alpha \\ b+d = \beta \\ -b-d = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = a+c \\ \beta = b+d \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc } M(a,b) + M(c,d) = M(a+c, b+d)}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} M(a,b) \times M(c,d) = M(\alpha, \beta) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} ac-bd = \alpha \\ ad+bc = \beta \\ -ad-bc = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = ac-bd \\ \beta = ad+bc \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc } M(a,b) \times M(c,d) = M(ac-bd, ad+bc)}$$

Calcul de $M(a,b)M(a,-b)$

$$M(a,b)M(a,-b) = M(a \times a - b \times (-b), a \times (-b) + b \times a) = M(a^2 + b^2, 0) = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = (a^2 + b^2)I_2$$

Par conséquent,

- si $a^2 + b^2 \neq 0 \Leftrightarrow (a,b) \neq (0,0)$ (car $a^2 + b^2$ représente le carré de la distance du point (a,b) du plan au point $(0,0)$), on a

$$M(a,b) \left[\frac{1}{a^2 + b^2} M(a,-b) \right] = I_2$$

ce qui montre que la matrice $M(a,b)$ est inversible et son inverse est

$$[M(a,b)]^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} M(a,-b) = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ -\frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} = M\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2}\right)$$

- Si $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a,b) = (0,0) \Leftrightarrow a = b = 0$ alors $M(a,b) = 0_2$ qui n'est clairement pas inversible.

Conclusion : la matrice $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $(a, b) \neq (0, 0)$
 et dans ce cas, on a : $[M(a, b)]^{-1} = M\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2}\right)$

correction de l'exercice 6

1. Un calcul direct montre que :

$$P^2 = P, \quad Q^2 = 2Q, \quad PQ = 0_3, \quad QP = 0_3$$

2. Détermination des valeurs de a et b pour que $M(a, b) = I_3$

$$M(a, b) = I_2 \Leftrightarrow a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 \\ 2a + 4b & -2a - 2b & -2a - 4b \\ -a - 2b & a + 2b & a + 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 1 \\ 2a + 4b = 0 \\ -2a - 2b = 1 \\ -2a - 4b = 0 \\ -a - 2b = 0 \\ a + 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = -1 \end{cases}$$

Un calcul purement algébrique (c'est-à-dire en utilisant uniquement les égalités précédentes) nous donne

$$\begin{aligned} M(a, b) + M(c, d) &= aP + bQ + cP + dQ = (a + c)P + (b + d)Q = M(a + c, b + d) \\ M(a, b) \times M(c, d) &= (aP + bQ)(cP + dQ) = ac \underbrace{P^2}_{=P} + ad \underbrace{PQ}_{=0_3} + bc \underbrace{QP}_{=0_3} + bd \underbrace{Q^2}_{=2Q} \\ &= acP + 2bdQ = M(ac, 2bd) \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$M(a, b) + M(c, d) = M(a + c, b + d) \quad M(a, b) \times M(c, d) = M(ac, 2bd)$$

Recherchons c et d tels que $M(a, b)M(c, d) = I_3$. En tenant compte que $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on a

$$M(a, b) \times M(c, d) = I_3 \Leftrightarrow M(ac, 2bd) = M\left(-1, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} ac = -1 \\ 2bd = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{a} \\ d = \frac{1}{4b} \end{cases}$$

On en déduit que $M(a, b)M\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{4b}\right) = I_3$ ce qui implique que

la matrice $M(a, b)$ est inversible et son inverse est $M\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{4b}\right)$.

correction de l'exercice 7

On utilise le pivot de Gauss

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x - y + z = a} \\ 3y = b - a \\ 2y + z = c - a \end{cases} \begin{array}{l} \text{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = a \\ \overline{3y = b - a} \\ 3z = -a - 2b + 3c \end{cases} \begin{array}{l} \text{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + c \\ y = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b \\ x = a + y - z = a + b - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b - c \\ y = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b \\ z = -\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\text{l'inverse de la matrice } A \text{ est la matrice } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification : Un calcul direct montre que $AA^{-1} = I_3$ donc on bien obtenu l'inverse de A .

correction de l'exercice 8

Par les systèmes :

Inversibilité de A

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x + 2z \\ z \\ -y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2z = a \\ z = b \\ -y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2z = a \\ -y + z = c \\ z = b \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

Ce dernier système est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc le système est de Cramer. Par conséquent, la matrice A est inversible et l'on a

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} z = b \\ y = -c + z = b - c \\ x = -a + 2z = -a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + 2b \\ y = b - c \\ z = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\text{la matrice } A \text{ est inversible et son inverse est } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérification : un calcul direct montre que $AA^{-1} = I_3$

Inversibilité de B

$$\begin{aligned} BX = Y &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y + z \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x - y = a} \\ 3y + z = b - a \\ 2y = c - a \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{3y + z = b - a} \\ -2z = -a - 2b + 3c \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ce dernier système est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc le système est de Cramer, ce qui implique que la matrice B est inversible et l'on a

$$BX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{-a - 2b + 3c}{-2} = \frac{1}{2}a + b - \frac{3}{2}c \\ y = \frac{b - a - z}{3} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \\ x = a + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \\ y = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{2}a + b - \frac{3}{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\text{la matrice } B \text{ est inversible et son inverse est } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Vérification : un calcul direct montre que $BB^{-1} = I_3$

Inversibilité de C

$$CX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = a \\ x = b \\ y = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{3x - 2y = a} \\ 2y = 3b - a \\ y = c \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = a \\ \boxed{2y = 3b - a} \\ 0 = a - 3b + 3c \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{array} \right.$$

Ce dernier système est triangulaire et l'un des coefficients diagonaux est nul (le coefficient de z dans la troisième ligne) donc le système n'est pas de Cramer, ce qui implique que

la matrice C n'est pas inversible

Inversibilité de D

$$DX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x + 2y + z \\ -x + y - z \\ -2x - 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y + z = a \\ -x + y - z = b \\ -2x - 2y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{4x + 2y + z = a} \\ 6y - 3z = 4b + a \\ -2y + 3z = 2c + a \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow 4L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y + z = a \\ \boxed{6y - 3z = 4b + a} \\ 6z = 4a + 4b + 6c \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{array} \right.$$

Ce dernier système est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc le système est de Cramer, ce qui implique que la matrice D est inversible et l'on a

$$DX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{4a + 4b + 6c}{6} = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + c \\ y = \frac{4b + a + 3z}{6} = \frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}c \\ x = \frac{a - 2y - z}{4} = -\frac{1}{6}a - \frac{2}{3}b - \frac{1}{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{6}a - \frac{2}{3}b - \frac{1}{2}c \\ y = \frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}c \\ z = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

la matrice D est inversible et son inverse est $D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

Vérification : un calcul direct montre que $DD^{-1} = I_3$

Inversibilité de E

$$EX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - y + 2z - 2t \\ z - t \\ x - y + z \\ x - y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z - 2t = a \\ z - t = b \\ x - y + z = c \\ x - y + z = d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x - y + 2z - 2t = a} \\ z - t = b \\ -z + 2t = c - a \\ -z + 2t = d - a \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } x \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z - 2t = a \\ \boxed{z - t = b} \\ t = c - a + b \\ t = d - a + b \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } z \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z - 2t = a \\ z - t = b \\ \boxed{t = c - a + b} \\ 0 = d - c \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } t \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \right.$$

Ce dernier système est triangulaire et l'un des coefficients diagonaux est nul (le coefficient de y dans la deuxième ligne) donc le système n'est pas de Cramer, ce qui implique que

la matrice E n'est pas inversible

Remarque : après avoir effectuer le pivot pour x , on constate que y n'apparaît dans aucune des trois autres équations donc nécessairement le système ne peut être de Cramer car y n'aura jamais une valeur définie donc il s'agira d'une variable libre, ce qui est absurde dans un système de Cramer

Inversibilité de F

$$\begin{aligned}
 FX = Y &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+y+t \\ -x+z+t \\ -y-z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = a \\ -x+y+t = b \\ -x+z+t = c \\ -y-z+t = d \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x+y+z = a} \\ 2y+z+t = b+a \\ y+2z+t = c+a \\ -y-z+t = d \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z = a \\ \boxed{2y+z+t = b+a} \\ 3z+t = a-b+2c \\ -z+3t = 2d+b+a \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 + L_2 \end{array} \right. \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z = a \\ 2y+z+t = b+a \\ \boxed{3z+t = a-b+2c} \\ 10t = 4a+2b+2c+6d \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Pivot pour } z \\ L_4 \leftarrow 3L_4 + L_3 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Ce dernier système est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc le système est de Cramer, ce qui implique que la matrice F est inversible et l'on a

$$\begin{aligned}
 FX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4a+2b+2c+6d}{10} = \frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b + \frac{1}{5}c + \frac{3}{5}d \\ z = \frac{a-b+2c-t}{3} = \frac{1}{5}a - \frac{2}{5}b + \frac{3}{5}c - \frac{1}{5}d \\ y = \frac{a+b-z-t}{2} = \frac{1}{5}a + \frac{3}{5}b - \frac{2}{5}c - \frac{1}{5}d \\ x = a-y-z = \frac{3}{5}a - \frac{1}{5}b - \frac{1}{5}c + \frac{2}{5}d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}a - \frac{1}{5}b - \frac{1}{5}c + \frac{2}{5}d \\ y = \frac{1}{5}a + \frac{3}{5}b - \frac{2}{5}c - \frac{1}{5}d \\ z = \frac{1}{5}a - \frac{2}{5}b + \frac{3}{5}c - \frac{1}{5}d \\ t = \frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b + \frac{1}{5}c + \frac{3}{5}d \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

la matrice F est inversible et son inverse est $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Vérification : un calcul direct montre que $FF^{-1} = I_4$

Par les opérations élémentaires sur les matrices :

Inversibilité de A

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} \right.$$

La nouvelle matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice A est inversible et l'on a

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array} \right.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ est inversible et son inverse est } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Vérification : un calcul direct montre que $AA^{-1} = I_3$

Inversibilité de B

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \left| \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} & \left| \begin{array}{l} L_3 \leftrightarrow 3L_3 - 2L_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

La nouvelle matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice B est inversible et l'on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} & \left| \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow 2L_2 + L_3 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \vdots \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} & \left| \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow 6L_1 + L_2 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \vdots \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} & \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la matrice } B \text{ est inversible et son inverse est } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

Vérification : un calcul direct montre que $BB^{-1} = I_3$

Inversibilité de C

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \left| \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow 3L_2 - L_1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} & \left| \begin{array}{l} L_3 \leftrightarrow 2L_3 - L_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

La nouvelle matrice est triangulaire et l'un des coefficients diagonaux est nul ce qui implique que

$\boxed{\text{la matrice } C \text{ n'est pas inversible}}$

Inversibilité de D

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} & \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} & \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \left| \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow 4L_2 + L_1 \\ L_3 \leftrightarrow 2L_3 + L_1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} & \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} & \left| \begin{array}{l} L_3 \leftrightarrow 3L_3 + L_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

La nouvelle matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice D est inversible et l'on a

$$\begin{pmatrix} 24 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 6 & 12 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 6L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} -4 & -16 & -12 \\ 6 & 12 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{24}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{12}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3 \end{array} \right.$$

Par conséquent,

la matrice D est inversible et son inverse est $D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

Vérification : un calcul direct montre que $DD^{-1} = I_3$

Inversibilité de E

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftrightarrow L_4 - L_1 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftrightarrow L_4 + L_2 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_4 \leftrightarrow L_4 - L_3 \end{array} \right.$$

La nouvelle matrice est triangulaire et au l'un des coefficients diagonaux est nul (le coefficient de y dans la deuxième ligne) donc

la matrice E n'est pas inversible

Inversibilité de F :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_3 \leftrightarrow 2L_3 - L_2 \\ L_4 \leftrightarrow 2L_4 + L_2 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_4 \leftrightarrow 3L_4 + L_3 \end{array} \right.$$

La nouvelle matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice F est inversible et l'on a

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & -2 & -6 \\ 6 & -12 & 18 & -6 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 10L_2 - L_4 \\ L_3 \leftarrow 10L_3 - L_4 \end{array} \right. \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 30 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix} 24 & 12 & -18 & 6 \\ 12 & 36 & -24 & -12 \\ 6 & -12 & 18 & -6 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 30L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{array} \right. \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix} 36 & -12 & -12 & 24 \\ 12 & 36 & -24 & -12 \\ 6 & -12 & 18 & -6 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \end{array} \right. \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{60}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{60}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{30}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{10}L_4 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Par conséquent,

la matrice F est inversible et son inverse est $F^{-1} =$	$ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} $
---	--

Vérification : un calcul direct montre que $FF^{-1} = I_4$