correction de l'exercice 1
Cas sans remise :
<u>Loi de R</u> : Il est évident que $R(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ (au mieux on pioche 5 boules vertes et donc 1 boule rouge) et

$$\forall k \in [\![1, 6]\!], \quad P(R = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{15}{6}}.$$

Justification du calcul : Pour les cas possibles on choisit 6 boules parmi les 15 disponibles et pour les cas favorables, on choisit k boules parmi les 10 boules rouges disponibles et les $6 - k$ autres parmi les 5 vertes.
La variable R suit donc la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(6, 10, 15)$ et $E(R) = 6 \times \frac{10}{15} = 4$. Un calcul direct nous donne

$$E(R^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(R = k) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \frac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{15}{6}} = \frac{118}{7} \Rightarrow V(R) = E(R^2) - (E(R))^2 = \frac{118}{7} - 16 = \frac{6}{7}$$

<u>Loi de V</u> : Il est évident que $V(\Omega) = [\![0, 5]\!]$ (on peut avoir 0 boule verte si l'on pioche 6 boules rouges) et

$$\forall k \in [\![0, 5]\!], \quad P(V = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{10}{6-k}}{\binom{15}{6}}.$$

Justification du calcul : Pour les cas possible,s on choisit 6 boules parmi les 15 disponibles et pour les cas favorables, on choisit k boules parmi les 5 boules vertes disponibles et les $6 - k$ autres parmi les 10 rouges.
La variable V suit donc la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(5, 5, 15)$ et $E(V) = 6 \times \frac{5}{15} = 2$. Un calcul direct nous donne

$$E(V^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(V = k) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \frac{\binom{5}{k}\binom{10}{6-k}}{\binom{15}{6}} = \frac{34}{7} \Rightarrow V(V) = E(V^2) - (E(V))^2 = \frac{34}{7} - 2 = \frac{20}{7}$$

Les variables V et R ne sont pas indépendantes puisque $P(R = 1 \cap V = 0) = 0$ (on ne peut piocher 6 boules dont 1 rouge et 0 verte) et

$$P(R = 1)P(V = 0) = \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{6-1}}{\binom{15}{6}} \times \frac{\binom{5}{0}\binom{10}{6-0}}{\binom{15}{6}} \neq 0 \Rightarrow P(R = 1 \cap V = 0) \neq P(R = 1)P(V = 0)$$

Cas avec remise :
On considère l'expérience $\mathcal{E}$: " piocher une boule dans l'urne contenant 10 boules rouges et 5 boules vertes ". Puisque les tirages sont avec remise, le fait de piocher 6 boules avec remise signifie que l'on considère 6 expériences absolument identiques à l'expérience $\mathcal{E}$, chaque expérience étant indépendante des autres. Les variables R et V représentent respectivement le nombre réalisations de l'évènement A : " obtenir une boule rouge " et de l'évènement B : " obtenir une boule verte ". La probabilité de réalisation de l'évènement A étant égale à $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ et celle de l'évènement B étant égale à $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, on en déduit que les variables R et V suivent respectivement la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6, \frac{2}{3}\right)$ et $\mathcal{B}\left(6, \frac{1}{3}\right)$, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
R(\Omega) &= [\![0, 6]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, 6]\!], \quad P(R = k) = \binom{6}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{6-k} = \binom{6}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k} \\
E(R) &= 6 \times \frac{2}{3} = 4 \quad V(R) = 6 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \\
V(\Omega) &= [\![0, 6]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, 6]\!], \quad P(V = k) = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{6-k} = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{6-k} \\
E(R) &= 6 \times \frac{1}{3} = 2 \quad V(R) = 6 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Les variables V et R ne sont pas indépendantes puisque $P(R = 0 \cap V = 0) = 0$ (on ne peut piocher 6 boules dont 0 rouge et 0 verte) et

$$P(R = 0)P(V = 0) = \binom{6}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^{6-0} \times \binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{6-0} \neq 0 \Rightarrow P(R = 0 \cap V = 0) \neq P(R = 0)P(V = 0)$$

correction de l'exercice 2

1. On considère l'expérience $\mathcal{E}$: " le client contacte le service " ainsi que l'évènement A : " le client subit un retard ". On considère 8 expériences absolument identiques à l'expérience $\mathcal{E}$, chaque expérience étant indépendantes des autres et X désigne le nombre de succès de l'évènement A. La probabilité de l'évènement A étant égale à $\frac{1}{4}$, on en déduit que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(8, \frac{1}{4}\right)$, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= [\![0,8]\!], \quad \forall k \in [\![0,8]\!], \quad P(X=k) = \binom{8}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(1-\frac{1}{4}\right)^{8-k} = \binom{8}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{8-k} \\ E(X) &= 8 \times \frac{1}{4} = 2 \qquad V(X) = 8 \times \frac{1}{4} \times \left(1-\frac{1}{4}\right) = 6 \end{aligned}$$

2. Il est évident que $M(\Omega) = [\![0,2]\!]$ et que $\forall k \in [\![0,2]\!], \quad P(M=k) = \dfrac{\binom{2}{k}\binom{6}{4-k}}{\binom{8}{4}}$.

   Justification du calcul : Pour les cas possible,s on choisit 4 clients parmi les 8 sélectionnés et pour les cas favorables, on choisit k clients parmi les 2 clients mécontents et les $4-k$ autres parmi les 6 clients satisfaits.

   Ainsi la variable M suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(4,2,8)$, ce qui nous donne $E(M) = 4 \times \frac{2}{8} = 1$.

correction de l'exercice 3

La variable X_n : On considère l'expérience $\mathcal{E}$: " piocher une boule dans l'urne contenant 2 boules blanches et 8 boules noires " ainsi que l'évènement A : " piocher une boule blanche ". On considère n expériences absolument identiques à l'expérience $\mathcal{E}$, chaque expérience étant indépendantes des autres et X_n désigne le nombre de réalisations de l'évènement A. La probabilité de l'évènement A étant égale à $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, on en déduit que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{5}\right)$, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} X_n(\Omega) &= [\![0,n]\!], \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(X_n=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \\ E(X_n) &= n \times \frac{1}{5} = \frac{n}{5} \qquad V(X_n) = n \times \frac{1}{5} \times \left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{4n}{25} \end{aligned}$$

Expression de Y_n : On pioche X_n boules blanches et, comme on pioche n boules au total, $n - X_n$ boules noires. Chaque boule blanche fait gagner 2 points, donc les X_n boules blanches font gagner $2X_n$ points, et chaque boule noire fait perdre 3 points, donc les $n - X_n$ boules noires font perdre $3(n-X_n)$ points. Par conséquent, le nombre de points obtenus est égal à $Y_n = 2X_n - 3(n-X_n) = 5X_n - 3n$.

La variable Y_n : Puisque $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$, on a : $Y_n(\Omega) = \{5k-3n, \quad k \in [\![0,n]\!]\}$. Cet ensemble n'étant pas explicitable aisément (car $X_n(\Omega) = \{-3n, -3n+5, -3n+10, ..., 2n-5, 2n\}$) on gardera cette notation.

$$\forall k \in X_n(\Omega), \quad P(X_n = k) = P(5Y_n - 3n = k) = P\left(Y_n = \frac{3n+k}{5}\right) = \binom{n}{\frac{3n+k}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3n+k}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-\frac{3n+k}{5}}$$

Remarquons que $k \in Y_n(\Omega)$ alors il existe un entier $q \in [\![0,n]\!]$ tel que $k = 5q - 3n$ donc $\frac{3n+k}{5} = q$ est bien un nombre entier naturel.

correction de l'exercice 4

La variable Y_n : On considère l'expérience $\mathcal{E}$: " le puce saute d'une ou deux cases " ainsi que l'évènement A : " la puce saute d'une case ". On considère n expériences absolument identiques à l'expérience $\mathcal{E}$, chaque expérience étant indépendantes des autres et Y_n désigne le nombre de réalisations de l'évènement A. La probabilité de l'évènement A étant égale à $\frac{1}{2}$ (la puce choisit au hasard de sauter d'une ou de deux cases), on en déduit que X

suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} Y_n(\Omega) &= [\![0,n]\!], \quad \forall k\in[\![0,n]\!], \quad P(Y_n=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n} \\ E(Y_n) &= n\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2} \qquad V(Y_n)=n\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{n}{4}\end{aligned}$$

<u>Expression de X_n</u> : La puce saute Y_n fois d'une case et, comme elle effectue n sauts au total, elle saute de deux cases $n-Y_n$ fois. Chaque saut d'une case permet à la puce d'avancer ..... d'une case (!!), donc les Y_n sauts d'une case lui permette d'avancer de Y_n cases, et chaque saut de deux cases lui permettant d'avancer ...... de deux cases (sic), donc les $n-Y_n$ sauts de deux cases lui permettent d'avance de $2(n-Y_n)$ cases. Par conséquent, la puce avance de $X_n=Y_n+2(n-Y_n)=2n-Y_n$ cases.
<u>La variable Y_n</u> : Il est alors immédiat que

$$E(X_n)=E(2n-Y_n)=2n-E(Y_n)=2n-\frac{n}{2}=\frac{3n}{2} \qquad V(X_n)=V(2n-Y_n)=(-1)^2V(Y_n)=\frac{n}{4}$$

Puisque $Y_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$, on a : $X_n(\Omega)=\{2n-k, \quad k\in[\![0,n]\!]\}=[\![n,2n]\!]$ et

$$\forall k\in[\![n,2n]\!], \quad P(X_n=k)=P(2n-Y_n=k)=P(Y_n=2n-k)=\frac{\binom{n}{2n-k}}{2^n}$$

correction de l'exercice 5

1. On considère l'expérience $\mathcal{E}$: " lancer le dé D ". Puisque les tirages sont avec remise, le fait de lancers n fois le dé D signifie que l'on considère n expériences absolument identiques à l'expérience $\mathcal{E}$, chaque expérience étant indépendante des autres. La variable $X_n^{(i)}$ représente le nombre réalisations de l'évènement A_i : " la face obtenue porte le numéro i ". La probabilité de réalisation de l'évènement A_1 (resp. A_2, resp. A_3) étant égale à $\dfrac{7}{20}$ (resp. $\dfrac{8}{20}$, resp. $\dfrac{5}{20}$), on en déduit que la variable $X_n^{(1)}$ (resp. $X_n^{(2)}$, resp. $X_n^{(3)}$) suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\dfrac{7}{20}\right)$ (resp. $\mathcal{B}\left(n,\dfrac{8}{20}\right)$, resp. $\mathcal{B}\left(n,\dfrac{5}{20}\right)$), ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} X_n^{(1)}(\Omega) &= [\![0,n]\!], \quad \forall k\in[\![0,n]\!], \quad P\left(X_n^{(1)}=k\right)=\binom{n}{k}\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(1-\frac{7}{20}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(\frac{13}{20}\right)^{n-k} \\ E(X_n^{(1)}) &= n\times\frac{7}{20}=\frac{7n}{20} \qquad V(X_n^{(1)})=n\times\frac{7}{20}\times\left(1-\frac{7}{20}\right)=\frac{91}{400}n \\ X_n^{(2)}(\Omega) &= [\![0,n]\!], \quad \forall k\in[\![0,n]\!], \quad P\left(X_n^{(2)}=k\right)=\binom{n}{k}\left(\frac{8}{20}\right)^k\left(1-\frac{8}{20}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{8}{20}\right)^k\left(\frac{12}{20}\right)^{n-k} \\ E(X_n^{(2)}) &= n\times\frac{8}{20}=\frac{8n}{20} \qquad V(X_n^{(2)})=n\times\frac{8}{20}\times\left(1-\frac{8}{20}\right)=\frac{6}{25}n \\ X_n^{(3)}(\Omega) &= [\![0,n]\!], \quad \forall k\in[\![0,n]\!], \quad P\left(X_n^{(3)}=k\right)=\binom{n}{k}\left(\frac{5}{20}\right)^k\left(1-\frac{6}{20}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{5}{20}\right)^k\left(\frac{15}{20}\right)^{n-k} \\ E(X_n^{(3)}) &= n\times\frac{5}{20}=\frac{5n}{20} \qquad V(X_n^{(3)})=n\times\frac{5}{20}\times\left(1-\frac{5}{20}\right)=\frac{3}{16}n\end{aligned}$$

2. L'évènement $\left(X_n^{(1)}=0\right)\cap\left(X_n^{(2)}=0\right)$ signifie que les faces 1 et 2 ne sont pas apparues lors des n lancers donc les n lancers ont donné uniquement des faces 3 donc $\left(X_n^{(1)}=0\right)\cap\left(X_n^{(2)}=0\right)=\left(X_n^{(3)}=n\right)$. Par conséquent, on a

$$P\left[\left(X_n^{(1)}=0\right)\cap\left(X_n^{(2)}=0\right)\right]=P\left(X_n^{(3)}=n\right)=\left(\frac{5}{20}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

D'autre part, on a

$$P\left(X_n^{(1)}=0\right)P\left(X_n^{(2)}=0\right)=\left(\frac{13}{20}\right)^n\left(\frac{12}{20}\right)^n=\left(\frac{13\times 12}{20\times 20}\right)^n=\left(\frac{39}{100}\right)^n$$

donc $P\left[\left(X_n^{(1)}=0\right)\cap\left(X_n^{(2)}=0\right)\right]\neq P\left(X_n^{(1)}=0\right)P\left(X_n^{(2)}=0\right)$, ce qui implique que les variables $X_n^{(1)}$ et $X_n^{(2)}$ ne sont pas indépendantes.

3. On note G_n le gain du jeu. Il est immédiat que $G_n=1\times X_n^{(1)}-2\times X_n^{(2)}+a\times X_n^{(3)}$. Le gain du jeu est positif en moyenne si et seulement si

$$\begin{aligned} E(G_n) &\geqslant 0\Leftrightarrow E\left(X_n^{(1)}-2X_n^{(2)}+aX_n^{(3)}\right)\geqslant 0\Leftrightarrow E\left(X_n^{(1)}\right)-2E\left(X_n^{(2)}\right)+aE\left(X_n^{(3)}\right)\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{7n}{20}-2\times\frac{8n}{20}+a\times\frac{5n}{20}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{1}{20}n\left(5a-9\right)\geqslant 0\Leftrightarrow 5a-9\geqslant 0\Leftrightarrow a\geqslant\frac{9}{5}\end{aligned}$$

Ainsi, le gain moyen du jeu est positif si et seulement $a\geqslant\frac{9}{5}$, autrement dit, si chaque lancer fournissant le numéro 3 rapporte au moins 1,8 euros.

correction de l'exercice 6

1. Variable X_1 :Il est immédiat que $X_1(\Omega)=\{0,1\}$, $P(X_1=0)=\frac{1}{2}$, $P(X_1=1)=\frac{1}{2}$; $E(X_1)=\frac{1}{2}$

Variable X_2 : Par définition, $X_2(\Omega)=\{0,1\}$.

La première pioche influe sur le contenu de l'urne (selon que l'on ait pioché une boule blanche, ce qui s'écrit $X_1=1$, ou une boule noire, ce qui s'écrit $X_1=0$) donc on introduit le système complet d'évènements $(X_1=0)$ et $(X_1=1)$

$$\begin{aligned} P\left(X_2=0\right) &= P(X_1=0\cap X_2=0)+P(X_1=1\cap X_2=0)\\ &= P(X_1=0)P_{(X_1=0)}(X_2=0)+P(X_1=1)P_{(X_1=1)}(X_2=0)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{c+2}=\frac{c+2}{2(c+2)}=\frac{1}{2}\\ P\left(X_2=1\right) &= 1-P(X_2=0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Justification des calculs :

$P_{(X_1=0)}(X_2=0)$ *: L'évènement $(X_1=0)$ est réalisé, ce qui signifie que l'on a pioché une boule noire au premier tirage, on remet donc c boules noires supplémentaires dans l'urne qui contient alors $c+2$ boules dont $c+1$ noires et 1 blanche. On souhaite alors que l'évènement $(X_2=0)$ se réalise, c'est-à-dire que l'on pioche une boule noire dans l'urne. La probabilité de cet évènement est alors $\frac{c+1}{c+2}$ donc $P_{(X_1=0)}(X_2=0)=\frac{c+1}{c+2}$*

$P_{(X_1=1)}(X_2=0)$ *: L'évènement $(X_1=1)$ est réalisé, ce qui signifie que l'on a pioché une boule blanche au premier tirage, on remet donc c boules blanches supplémentaires dans l'urne qui contient alors $c+2$ boules dont 1 noire et $c+1$ blanches. On souhaite alors que l'évènement $(X_2=0)$ se réalise, c'est-à-dire que l'on pioche une boule noire dans l'urne. La probabilité de cet évènement est alors $\frac{1}{c+2}$ donc $P_{(X_1=1)}(X_2=0)=\frac{1}{c+2}$.*

Il est immédiat que $E(X_2)=\frac{1}{2}$.

2. C'est le nombre de boules blanches obtenues au cours des p tirages (cf. le cours). Il est alors immédiat que $Z_p\left(\Omega\right)=[\![0,p]\!]$.

Loi de Z_2 : On sait que $Z_2(\Omega)=[\![0,2]\!]$ et, en utilisant les calculs de la première question ainsi que le fait que $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0,1\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
P(Z_2=0) &= P(X_1+X_2=0) = P[(X_1=0)\cap(X_2=0)] = P(X_1=0)P_{(X_1=0)}(X_2=0)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2} = \frac{c+1}{2(c+2)}\\
P(Z_2=1) &= P(X_1+X_2=1) = P[(X_1=0)\cap(X_2=1)] + P[(X_1=1)\cap(X_2=0)]\\
&= P(X_1=0)P_{(X_1=0)}(X_2=1) + P(X_1=1)P_{(X_1=1)}(X_2=0)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{c+2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{c+2} = \frac{1}{c+2}\\
P(Z_2=2) &= P(X_1+X_2=2) = P[(X_1=1)\cap(X_2=1)] = P(X_1=1)P_{(X_1=1)}(X_2=1)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2} = \frac{c+1}{2(c+2)}
\end{aligned}$$

Justification des calculs :
$P_{(X_1=0)}(X_2=1)$: L'évènement $(X_1=0)$ est réalisé, ce qui signifie que l'on a pioché une boule noire au premier tirage, on remet donc c boules noires supplémentaires dans l'urne qui contient alors $c+2$ boules dont $c+1$ noires et 1 blanche. On souhaite alors que l'évènement $(X_2=1)$ se réalise, c'est-à-dire que l'on pioche une boule blanche dans l'urne. La probabilité de cet évènement est alors $\frac{1}{c+2}$ donc $P_{(X_1=0)}(X_2=1) = \frac{1}{c+2}$
$P_{(X_1=1)}(X_2=1)$: L'évènement $(X_1=1)$ est réalisé, ce qui signifie que l'on a pioché une boule blanche au premier tirage, on remet donc c boules blanches supplémentaires dans l'urne qui contient alors $c+2$ boules dont 1 noire et $c+1$ blanches. On souhaite alors que l'évènement $(X_2=1)$ se réalise, c'est-à-dire que l'on pioche une boule blanche dans l'urne. La probabilité de cet évènement est alors $\frac{c+1}{c+2}$ donc $P_{(X_1=1)}(X_2=1) = \frac{c+1}{c+2}$.

Remarque : on a bien $\sum_{k=0}^{2} P(Z_2=k) = 1$

3. Calcul de $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1)$: L'évènement $Z_p=k$ est réalisé, c'est-à-dire que l'on déjà pioché p boules (donc on a ajouté $p\times c$ boules dans l'urne qui en contenait initialement 2) et que l'on a obtenu k boules blanches en p tirages. On a donc ajouté $k\times c$ boules blanches et $(p-k)\times c$ boules noires. Après le $p^{ième}$ tirage, l'urne contient donc $2+pc$ boules dont $1+kc$ boules blanches et $1+(p-k)c$ boules noires.
On souhaite que l'évènement $X_{p+1}=1$ se réalise donc on souhaite piocher une boule blanche dans l'urne qui contient maintenant $2+pc$ boules dont $1+kc$ boules blanches et $1+(p-k)c$ boules noires donc la probabilité de réalisation est $\frac{1+kc}{2+pc}$, ce qui montre que $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1) = \frac{1+kc}{2+pc}$
La $(p+1)$-ième pioche dépend du contenu de l'urne après p pioches, c'est-à-dire qu'elle dépend du nombre de boules blanches obtenues lors des p premières pioches (le nombre de boules noires s'en déduisant immédiatement). Les évènements $(Z_p=0)$, $(Z_p=1)$, ..., $(Z_p=p)$ décrivent justement le nombre de boules blanches après p pioches. On utilise alors la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(Z_p=k)_{k\in[\![0,p]\!]}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
P(X_{p+1}=1) &= \sum_{k=0}^{p} P[(Z_p=k)\cap(X_{p+1}=1)] = \sum_{k=0}^{p} P(Z_p=k)P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1) = \sum_{k=0}^{p}\frac{1+kc}{2+pc}P(Z_p=k)\\
&= \frac{1}{2+pc}\sum_{k=0}^{p}(kc+1)P(Z_p=k) = \frac{c}{2+pc}\sum_{k=0}^{p}kP(Z_p=k) + \frac{1}{2+pc}\sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k)\\
&= \frac{c}{2+pc}E(Z_p) + \frac{1}{2+pc} = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}
\end{aligned}$$

Posons $(\mathcal{H}_p)$: les variables $X_1, .., X_p$ suivent une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$
Initialisation $p=1$: $(\mathcal{H}_1)$ est vraie d'après la question 1.
Hérédité : supposons que $(\mathcal{H}_p)$ est vraie et montrons que $(\mathcal{H}_{p+1})$ est vraie, c'est-à-dire supposons que les

variables $X_1,..,X_p$ suivent une loi de de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et montrons que les variables $X_1,..,X_{p+1}$ suivent une loi de de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Autrement dit, il suffit de montrer que la variable X_{p+1} suit une loi de Bernouilli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
D'une part, nous savons que

$$(1) \qquad P(X_{p+1}=1)=\frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}$$

et d'autre part, comme $Z_p=\sum\limits_{k=1}^{p}X_k$, on en déduit que

$$(2) \qquad E(Z_p)=\sum_{k=1}^{p}E(X_k)=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2}=\frac{p}{2}$$

puisque les variables $X_1,..,X_p$ suivent une loi de Bernouilli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Les égalités (1) et (2) nous montrent que

$$P(X_{p+1}=1)=\frac{1+c\times\frac{p}{2}}{2+pc}=\frac{\frac{2+pc}{2}}{2+pc}=\frac{1}{2}\Rightarrow P(X_{p+1}=0)=1-P(X_{p+1})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ce qui démontre que la variable X_{p+1} suit une loi de Bernouilli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et ce qui achève la récurrence.

correction de l'exercice 7

1. L'évènement $U=k$ est réalisé, ce qui signifie que l'on effectue n pioches dans l'urne U_k qui contient k boules rouges et de $N-k$ boules blanches. Puisque les pioches sont avec remise, nous sommes dans le cadre du schéma de la loi binomiale puisque l'on réalise n expériences identiques à l'expérience $\mathcal{E}$ " piocher une boule ". L'évènement $R=r$ se réalise si et seulement on pioche r boules rouges (dans l'urne U_k puisque l'évènement $U=k$ est réalisé), autrement dit, on souhaite r réalisations de l'évènement A " piocher une boule rouge ". La probabilité de l'évènement A étant $\dfrac{k}{N}$ (il y a k boules rouges dans l'urne A et $k+(N-k)=N$ boules au total), on en déduit que
$$P_{(U=k)}(R=r)=\binom{n}{r}\left(\frac{k}{N}\right)^r\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}$$

2. Calcul de $P(R=r)$: L'évènement $R=r$ signifie que l'on pioche r boules rouges. La pioche des boules dépendant de l'urne dans laquelle on pioche, on introduit naturellement le système complet d'évènements $(U=k)_{k\in[\![0,N]\!]}$. Puisque le choix de chaque urne est équiprobable et qu'il y a $N+1$ urnes, on a $\forall k\in [\![0,N]\!],\quad P(U=k)=\dfrac{1}{N+1}$, ce qui nous donne
$$\begin{aligned}P\left(R=r\right) &= \sum_{k=0}^{N}P\left[(U=k)\cap(R=r)\right]=\sum_{k=0}^{N}P(U=k)P_{(U=k)}(R=r)=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{N+1}\binom{n}{r}\left(\frac{k}{N}\right)^r\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}\\ &= \frac{\binom{n}{r}}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^r\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}\end{aligned}$$
Calcul de $P_{(R=r)}(U=k)$: On revient à la définition mathématique d'une probabilité conditionnelle et en utilisant les valeurs de $P\left(U=k\right)$, $P_{(U=k)}\left(R=r\right)$ et $P\left(R=r\right)$ ainsi qu'en laissant le lecteur faire les simplifications nécessaires, on obtient
$$P_{(R=r)}(U=k)=\frac{P\left[(U=k)\cap(R=r)\right]}{P\left(R=r\right)}=\frac{P\left(U=k\right)P_{(U=k)}\left(R=r\right)}{P\left(R=r\right)}=\frac{\left(\frac{k}{N}\right)^r\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}}{\sum\limits_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^r\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}}$$