correction de l'exercice 1

1. Le joueur peut avoir entre 0 et p numéros gagnants lors de la première phase donc $X(\Omega) = [\![0, p]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0, p]\!], \quad P(X = k) = \frac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}}$$

Justification des calculs de probabilité : *On dispose ici d'une population de taille n (les numéros) ainsi que d'une sous-population de taille p (les numéros gagnants). On pioche p éléments de la population glabale et X désigne le nombre d'éléments de la sous-population donc X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(p, n, p)$*
On peut aussi le justifier ainsi : pour les cas favorables, on choisit k numéros parmi les p numéros gagnants ($\binom{p}{k}$ choix) et les autres $p-k$ numéros sont choisit parmi les $n-p$ numéros non gagnants ($\binom{n-p}{p-k}$ choix), pour les cas possibles, on choisit p numéros parmi les n disponibles ($\binom{n}{p}$ choix) donc $P(X = k) = \dfrac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}}$.

Puisque X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(p, n, p)$, il est immédiat que $E(X) = p \times \dfrac{p}{n} = \dfrac{p^2}{n}$.
Par définition, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p} P(X &= k) = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} \frac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}} = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{n}{p} \\ E(X) &= \frac{p^2}{n} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} kP(X = k) = \frac{p^2}{n} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} k\frac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}} = \frac{p^2}{n} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} l\binom{p}{k}\binom{n}{p-k} = \frac{p^2}{n}\binom{n}{p}\end{aligned}$$

2. (a) La probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(Z_i = 1)$ signifie que l'évènement $(X = k)$ est réalisé et que l'on souhaite la réalisation de l'évènement $(Z_i = 1)$, c'est-à-dire que lors de la première phase du jeu, on a pioché k numéros gagnants et que l'on souhaite, lors de la seconde phase du jeu, que le i-ième numéro tiré soit un numéro gagnant. Autrement dit, au début de la seconde phase de jeu, on dispose de $n - 2p$ numéros dont $p - k$ sont gagnants (puisque le joueur a enlevé p numéros dont k numéros gagnants et le meneur a retiré p numéros tous perdants) et l'on souhaite que le i-ième numéro tiré parmi ces $n - 2p$ numéros soit gagnant. La probabilité que le i-ième numéro pioché soit gagnant est donc $\dfrac{p-k}{n-2p}$,ce qui implique que $P_{(X=k)}(Z_i = 1) = \dfrac{p-k}{n-2p}$.
Remarque : on pioche simultanément les numéros, chaque numéro a cette probabilité d'être gagnant mais la probabilité d'avoir q numéros gagnants n'est pas $\left(\dfrac{p-k}{n-2p}\right)^q$ car les tirages ne sont pas indépendants.

   (b) L'évènement $(Z_i = 1)$ signifie que le i-ième numéro pioché soit gagnant, cela dépend évidemement du nombre de numéros gagnants dans la première phase du jeu, ce qui est décrit mathématiquement par les évènements $(X = k)_{k \in [\![0,p]\!]}$. La formule des probabilités totales appliquée à ce système complet d'évènements nous donne

$$\begin{aligned}P(Z_i &= 1) = \sum_{k=0}^{p} P(X = k \cap Z_i = 1) = \sum_{k=0}^{p} P(X = k)P_{(X=k)}(Z_i = 1) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}} \frac{p-k}{n-2p} \\ &= \frac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^{p} (p-k)\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}\end{aligned}$$

   (c) Il est immédiat que $Z = \sum_{i=1}^{p} Z_i$ (revoir pour cela le cours sur les variables de Bernouilli) donc $E(Z) = \sum_{i=1}^{p} E(Z_i)$.
Ensuite, l'espérance d'une variable de Bernouilli Z_i est égale à la probabilité $P(Z_i = 1)$. D'après les relations (1) et (2) obtenues à la question 1 et en scindant en deux la somme définissant $P(Z_i = 1)$, on obtient

$$\begin{aligned}P(Z_i &= 1) = \frac{p}{(n-2p)\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n}{p-k} - \frac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^{p} k\binom{p}{k}\binom{n}{p-k} \\ &= \frac{p}{(n-2p)\binom{n}{p}}\binom{n}{p} - \frac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}} \frac{p^2}{n}\binom{n}{p} = \frac{np - p^2}{(n-2p)n}\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{p} E(Z_i) = \sum_{i=1}^{p} \frac{np - p^2}{(n-2p)n} = \frac{np - p^2}{(n-2p)n} \times p = \frac{p^2(n-p)}{n(n-2p)}$$

3. On remarque immédiatement que $E(Z)=\frac{n-p}{n-2p}E(X)$ et, comme $\frac{n-p}{n-2p}\geqslant 1$ et $E(X)\geqslant 0$, on en déduit que $E(Z)\geqslant E(X)$ donc la stratégies B est préférable au joueur (en moyenne !!).

correction de l'exercice 2

1. Pour commencer, on constate que si l'on effectue 3 lancers, le plus grand nombre de changements est donné par PFP ou FPF. Plus généralement, pour obtenir k changements, il est indispensable d'effectuer $k+1$ lancers (1 changement nécessite deux lancers, 2 changements nécessitent 3 lancers, etc. !!). Par conséquent, si l'on effectue N lancers et que l'on souhaite k changements, on a nécessairement $k+1\leqslant N\Leftrightarrow k\leqslant N-1$. Ensuite, si $k\leqslant N-1$, on dispose de k changements en considérant les lancers

P	F	P	F	..	P	F	F	F	...	F
1	2	3	4	..	k	k+1	F	F	..	F

ou

P	F	P	F	..	F	P	P	P	...	P
1	2	3	4	..	k	k+1	P	P	..	P

selon la parité de k donc $X_N(\Omega)=\{0,...,N-1\}$.

2. Loi de X_2 : on effectue 2 lancers donc $X_2(\Omega)=\{0,1\}$ et

$$P\left(X_2=0\right)=P(PP)+P(FF)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\quad P\left(X_2=1\right)=P(FP)+P(PF)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

puis $E(X_2)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
Loi de X_3 : on effectue 3 lancers donc $X_3(\Omega)=\{0,1,2\}$ et

$$\begin{aligned}
P\left(X_3=0\right) &= P(PPP)+P(FFF)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}\\
P\left(X_3=1\right) &= P(PFF)+P(FPP)+P(PPF)+P(FFP)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}\\
P\left(X_3=2\right) &= P(FPF)+P(PFP)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

3. L'évènement $(X_N=0)$ signifie qu'il n'y a aucun changement en N lancers, ce qui implique que l'on obtient que des piles ou que des faces donc

$$P(X_N=0)=P(\underbrace{PP..P}_{N\text{ fois}})+P(\underbrace{FF...F}_{N\text{ fois}})=\left(\frac{1}{2}\right)^N+\left(\frac{1}{2}\right)^N=\frac{2}{2^N}=\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

L'évènement $(X_N=1)$ signifie qu'il y a un changement, ce qui implique que l'on obtient soit une succession de " Pile " puis une succession de " Face ", soit une succession de " Face " puis une succession de " Pile " donc

$$P(X_N=1)=\sum_{k=1}^{N-1}P(\underbrace{P...P}_{k\text{ fois}}\underbrace{F...F}_{N-\text{ fois}})+\sum_{k=1}^{N-1}P(\underbrace{F...F}_{k\text{ fois}}\underbrace{P...P}_{N-\text{ fois}})=\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^N+\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^N=2\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^N=2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

4. (a) La probabilité conditionnelle signifie que l'évènement $(X_N=k)$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X_{N+1}=k)$, c'est-à-dire qu'au cours des N lancers, il y a k changements et on veut qu'au cours des $N+1$ lancers, il y ait encore k changements, autrement dit, il faut que le N-ième lancer et le $(N+1)$-ième lancer donne le même résultat (pour ne pas ramener un changement supplémentaire). Etant donné que le N-ième lancer est déjà réalisé, la probabilité que le $(N+1)$-ième lancer donne le même résultat est égale à $\frac{1}{2}$ (par exemple, si le N-ième lancer donne un Pile, le suivant donne encore un Pile) donc $P_{(X_N=k)}(X_{N+1}=k)=\frac{1}{2}$.

   (b) En utilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
P\left(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k\right) &= P([X_{N+1}=X_N]\cap X_N=k)=P(X_{N+1}=k\cap X_N=k)\\
&= P(X_N=k)P_{(X_N=k)}(X_{N+1}=k)=\frac{1}{2}P(X_N=k).
\end{aligned}$$

   (c) La famille $(X_N=k)_{k\in[\![0,N-1]\!]}$ forment un système complet d'évènements donc

$$P(X_{N+1}-X_N=0)=\sum_{k=0}^{N-1}P\left(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k\right)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2}P(X_N=k).=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2}P(X_N=k)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

(d) La variable X_N représente le nombre de changements en N lancers et la variable X_{N+1} représente le nombre de changements en $N+1$ lancers. Etant donné qu'il ne peut y avoir que zéro ou un changement entre le N-ième lancer et le $(N+1)$-ième lancers, on en déduit que la variable $X_{N+1}-X_N$, qui représente en fait le nombre de changements entre le N-ième lancer et le $(N+1)$-ième lancer, prend seulement les valeurs 0 et 1, c'est-à-dire que $(X_{N+1}-X_N)(\Omega)=\{0,1\}$.
D'autre part, la question précédente montre que $P(X_{N+1}-X_N=0)=\dfrac{1}{2}$ donc
$P(X_{N+1}-X_N=1)=1-P(X_{N+1}-X_N=0)=\dfrac{1}{2}$, ce qui montre que la variable $X_{N+1}-X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Son espérance est donc égale à $\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire que

$$E(X_{N+1}-X_N)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow E(X_{N+1})-E(X_N)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow E(X_{N+1})=E(X_N)+\frac{1}{2}$$

La suite $(E(X_N)_{N\geqslant 1}$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et $E(X_2)=\dfrac{1}{2}$ (question 2), ce qui nous permet d'écrire

$$E(X_N)=\frac{1}{2}(N-2)+E(X_2)=\frac{N-2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{N-1}{2}$$

5. (a) Il s'agit de montrer les égalités suivantes $P\left(X_{N+1}-X_N=i\cap X_N=k\right)=P(X_{N+1}-X_N=i)P(X_N=k)$ pour $i\in[\![0,1]\!]$ et $k\in[\![0,N-1]\!]$. La question 4.c) montre que $P\left(X_{N+1}-X_N=0\right)=\dfrac{1}{2}$ et la question 4.b) montre que

$$P\left(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k\right)=\frac{1}{2}P(X_N=k)\Rightarrow P\left(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k\right)=P(X_{N+1}-X_N=0)P(X_N=k)$$

D'autre part, en refaisant le raisonnement de la question, on obtient $P_{(X_N=k)}\left(X_{N+1}-X_N=1\right)=\dfrac{1}{2}$ (il faut que le résultat du $(N+1)$-ième lancer soit différent du résultat du N-ième lancer, par exemple si le N-ième lancer donne Pile, il faut que le $(N+1)$-ième lancer donne Face) donc

$$P\left(X_{N+1}-X_N=1\cap X_N=k\right)=P_{(X_N=k)}\left(X_{N+1}-X_N=1\right)P(X_N=k)=\frac{1}{2}P(X_N=k)$$

et la question 4.d nous donne $P\left(X_{N+1}-X_N=1\right)=\dfrac{1}{2}$, ce qui implique l'égalité suivante

$$P\left(X_{N+1}-X_N=1\cap X_N=k\right)=P(X_{N+1}-X_N=1)P(X_N=k)$$

ce qui montre que les variables $X_{N+1}-X_N$ et X_N sont indépendantes.

(b) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_N)$: X_N suit une loi binômiale $B(N-1,\dfrac{1}{2})$.
Initialisation $N=2$: X_2 suit une loi de Bernouilli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ (cf. question 2) donc elle suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1,\dfrac{1}{2})=\mathcal{B}(2-1,\dfrac{1}{2})$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_2)$.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_N)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{N+1})$, c'est-à-dire supposons que la variable X_N suit la loi de binomiale $\mathcal{B}(N-1,\dfrac{1}{2})$ et montrons que la variable X_{N+1} suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N,\dfrac{1}{2})$.

- La question 4.d) montre que $X_{N+1}-X_N$ suit une loi de Bernouilli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, autrement dit elle suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1,\dfrac{1}{2})$.
- La variable X_N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N-1,\dfrac{1}{2})$
- Les variables $X_{N+1}-X_N$ et X_N sont indépendantes

Par conséquent, on peut affirmet que la variable $(X_{N+1}-X_N)+X_N=X_{N+1}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}((N-1)+1,\dfrac{1}{2})=\mathcal{B}(N,\dfrac{1}{2})$ (cf. le cours sur l'addition de variables binomiales indépendantes) ce qui achève la récurrence.

correction de l'exercice 3

1. On introduit l'expérience $\mathcal{E}$ " appeller un correspondant " et l'évènement A : " obtenir le correspondant ". La secrétaire effectue n expériences identiques à l'expérience $\mathcal{E}$ et X désigne le nombre de réalisation de l'évènement A donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, où $p=P(A)$. On a donc, en notant $q=1-q$,

$$X(\Omega)=[\![0,n]\!],\quad \forall k\in[\![0,n]\!],\quad P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k},\quad E(X)=np,\quad V(X)=npq$$

2. (a) Il est évident que la secrétaire peut obtenir au total entre 0 et n correspondants donc $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

(b) Calcul de $P(Z = 0)$: Puisque X et Y sont des variables dont les valeurs possibles sont dans $[\![0, n]\!]$, on a immédiatement

$$P(Z = 0) = P(X + Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 0) = P(X = 0)P_{(X=0)}(Y = 0) = q^n q^n = q^{2n}$$

Justification des calculs de probabilités :
$P(X = 0)$: c'est la question 1
$P_{(X=0)}(Y = 0)$: L'évènement $(X = 0)$ est réalisé, donc la secrétaire a obtenu un correspondant à la première série d'appels et elle appelle les n correspondants à la deuxième série d'appels, et l'évènement $(Y = 0)$ doit être réalisé, c'est-à-dire que la secrétaire ne contacte aucun des correspondants lors de la deuxième série d'appels. Par conséquent, la secrétaire appelle n correspondants et elle n'en obtient aucun. On est dans la même configuration que $X = 0$, ce qui implique $P_{(X=0)}(Y = 0) = q^n$.

Calcul de $P(Z = 1)$: : Puisque X et Y sont des variables dont les valeurs possibles sont dans $[\![0, n]\!]$, on a immédiatement

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= P(X + Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 0) + P(X = 0 \cap Y = 1) \\ &= P(X = 1)P_{(X=1)}(Y = 0) + P(X = 0)P_{(X=0)}(Y = 1) = \left[\binom{n}{1} pq^{n-1}\right] \times \left[q^{n-1}\right] + [q^n] \times \left[\binom{n}{1} pq^{n-1}\right] \\ &= npq^{2n-2} + npq^{2n-1} = npq^{2n-2}(1 + q) \end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités :
$P(X = 1)$: c'est la question 1
$P_{(X=1)}(Y = 0)$: L'évènement $(X = 1)$ est réalisé, donc la secrétaire a obtenu un correspondant à la première série d'appels et elle appelle les $n - 1$ autres correspondants à la deuxième série d'appels, et l'évènement $(Y = 0)$ doit être réalisé, c'est-à-dire que la secrétaire ne contacte aucun correspondant lors de la deuxième série d'appels. Par conséquent, la secrétaire appelle $n - 1$ correspondants et elle en obtient 0 donc $P_{(X=1)}(Y = 0) = q^{n-1}$.
$P(X = 0)$: c'est la question 1
$P_{(X=0)}(Y = 1)$: L'évènement $(X = 0)$ est réalisé, donc la secrétaire a obtenu un correspondant à la première série d'appels et elle appelle les n correspondants à la deuxième série d'appels, et l'évènement $(Y = 1)$ doit être réalisé, c'est-à-dire que la secrétaire contacte un correspondant lors de la deuxième série d'appels. Par conséquent, la secrétaire appelle n correspondants et elle en obtient 1. On est dans la même configuration que $X = 1$, ce qui implique $P_{(X=0)}(Y = 1) = P(X = 1) = \binom{n}{1} pq^{n-1}$

(c) L'évènement $(X = k)$ est réalisé, donc la secrétaire a contacté k correspondants à la première série d'appels et elle appelle les $n - k$ autres, et on souhaite la réalisation de l'évènement $(Y = h)$, c'est-à-dire que la secrétaire contacte h correspondants à la seconde série d'appels. Autrement dit, la secrétaire appelle $n - k$ correspondants et elle en obtient h. On est clairement dans une configuration binomiale (on répète $n - k$ expériences identiques à l'expérience $\mathcal{E}$ et on souhaite h réalisations de A) donc

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \forall h \in [\![0, n - k]\!], \quad P_{(X=k)}(Y = h) = \binom{n-k}{h} p^h q^{(n-k)-h} = \binom{n-k}{h} p^h q^{n-k-h}$$

Remarque : Etant donné que la secrétaire appelle $n - k$ correspondants, elle pne peut contacter plus de $n - k$ correspondants (sic), c'est pour cette raison que l'énoncé considère $h \in [\![0, n - k]\!]$. Lorsque $h > n - k$, la probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(Y = h)$ est nulle puisqu'elle correspond à un évènement impossible (obtenir plus de correspondants que de personnes appelées)

(d) Puisque X et Y prennent des valeurs entre 0 et n, l'égalité $X + Y = s$ nécessite que $X = 0$, donc $Y = s$, $X = 1$, donc $Y = s - 1$, $X = 2$, donc $Y = s - 2$, etc, jusqu'à $X = s$, donc $Y = s - s$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} P(Z = s) &= P(X + Y = s) = P(X = 0 \cap Y = s) + P(X = 1) \cap Y = s - 1) + \cdots P(X = s \cap Y = s - s) \\ &= \sum_{k=0}^{s} P((X = k) \cap (Y = s - k)). \end{aligned}$$

(e) Calcul de $P(Z = s)$: D'après les questions 2.c) et 2.d), on a

$$\begin{aligned} P(Z = s) &= \sum_{k=0}^{s} P((X = k) \cap (Y = s - k)) = \sum_{k=0}^{s} P(X = k)P_{(X=k)}(Y = s - k) \\ &= \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \binom{n-k}{s-k} p^{s-k} q^{n-k-(s-k)} = \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} p^k q^{n-k} p^{s-k} q^{n-s} \\ &= \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} p^s q^{2n-k-s} = p^s q^{2n-s} \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} q^{-k} \end{aligned}$$

$\underline{\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} = \binom{n}{s}\binom{s}{k}}$: En utilisant la définition des combinatoires par les factorielles, on a

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{(n-k)!}{(s-k)!((n-k)-(s-k))!} = \frac{n!}{k!(s-k)!(n-s)!} = \frac{n!}{s!(n-s)!}\times\frac{s!}{k!(s-k)!} = \binom{n}{s}\binom{s}{k}$$

$\underline{p_s = C_n^s[p(1+q)]^s(q^2)^{n-s}}$: En utilisant les deux égalités précédentes, on obtient

$$p_s = P(Z=s) = p^s q^{2n-s}\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}q^{-k} = p^s q^{2n-s}\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{s}\binom{s}{k}q^{-k} = \binom{n}{s}p^s q^{2n-s}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}q^{-k}$$

On voit apparaitre une belle formule du binôme avec $a = q^{-1}$ et $b = 1$ donc

$$\begin{aligned} p_s &= \binom{n}{s}p^s q^{2n-s}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}(q^{-1})^k(1)^{k-s} = \binom{n}{s}p^s q^{2n-s}\left(1+q^{-1}\right)^s = \binom{n}{s}p^s q^{2n-s}\left(\frac{q+1}{q}\right)^s \\ &= \binom{n}{s}p^s q^{2n-s}(q+1)^s q^{-s} = \binom{n}{s}p^s q^{2n-2s}(q+1)^s = \binom{n}{s}\left[p(q+1)\right]^s(q^2)^{n-s} \end{aligned}$$

(f) Puisque $q = 1-p \Leftrightarrow p = 1-q$, on a $p(1+q) = (1-q)(1+q) = 1-q^2$ donc

$$Z(\Omega) = [\![0,n]\!],\quad \forall k \in [\![0,n]\!],\quad P(Z=s) = \binom{n}{s}\left[1-q^2\right]^s(q^2)^{n-s}$$

ce qui montre que Z suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1-q^2) = \mathcal{B}(n, p(2-p))$
Remarque : on en déduit immédiatement que $E(Z) = np(2-p)$ et, puisque $E(X) = np$, on obtient que

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X)+E(Y) \Leftrightarrow E(Y) = E(Z)-E(X) = np(2-p)-np = np(2-p-1) = np(1-p)$$

En moyenne, la secrétaire obtient $np(1-p)$ correspondants.

correction de l'exercice 4

1. $\underline{\text{Loi de } I_n}$: Il est évident que $I_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et $\forall k \in [\![1,n]\!],\quad P(I_n = k) = \dfrac{1}{n}$
   $\underline{\text{Calcul de } P_{(I_n=1)}(X_n = k)}$: L'évènement $(I_n = 1)$ est réalisé, donc on a pioché la boule numéro 1 au premier tirage, et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X_n = k)$, c'est-à-dire qu'au premier tirage on a obtenu la boule numéro 1 et on souhaite obtenir la boule numéro 1 au k-ième tirage. Il est évident que si $k > 1$ alors l'évènement est impossible et si $k = 1$ alors l'évènement est certain donc $P_{(I_n=1)}(X_n = k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k > 1 \\ 0 & \text{si} \quad k = 1 \end{cases}$

2. On considère pour commencer la probabilité conditionnelle $P_{(I_n=k)}(X_n = j)$. L'évènement $(I_n = k)$ est réalisé, donc on a pioché la boule numéro k et on retire de l'urne toutes les boules numérotés de k à n, et on souhaite la réalisation de l'évènement $X_n = j$, c'est-à-dire que l'urne contient désormais $k-1$ boules numérotées de 1 à $k-1$ et on souhaite obtenir la boule numéro 1 au j-ième tirage. Puisqu'un tirage a déjà été effectué (celui qui a donné le numéro k, qui est réalisé d'après le conditionnement), il faut obtenir désormais la boule numéro 1 en $j-1$ tirages. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{(I_n=k)}(X_n = j)$ est la probabilité de tirer en $j-1$ tirages la boule numéro 1 dans une urne contenant les $k-1$ boules numérotées de 1 à $k-1$, c'est-à-dire la probabilité de l'évènement $(X_{k-1} = j-1)$ donc $P_{(I_n=k)}(X_n = j) = P(X_{k-1} = j-1)$.

3. (a) La variable X_1 représente le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule numéro 1 dans une urne contenant 1 numérotée 1. Il est évident que $X_1 = 1$ donc $X_1(\Omega) = \{1\}$ et $P(X_1 = 1) = 1$.
   (b) $\underline{(X_2 = 1)}$: il s'agit de l'évènement "obtenir la boule numéro 1 dans une urne contenant 2 boules numérotées 1,2"
   $\underline{\text{Loi de } X_2}$: L'urne contient 2 boules numérotées 1,2 et il est évident que l'on peut obtenir la boule numéro 1 en un tirage (la piocher directement) ou en deux tirages (tirer la boule numéro 2, retirer la boule numéro de l'urne, puis piocher la boule numéro 1) donc $X_2(\Omega) = \{1,2\}$. De cette argumentation, on en déduit immédiatement que

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}\quad P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

   Dès lors, il est immédiat que

$$E(X_2) = 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2},\quad E(X_2^2) = 1\times\frac{1}{2} + 2^2\times\frac{1}{2} = \frac{5}{2}\quad V(X_2) = E(X_2^2) - [E(X_2)]^2 = \frac{1}{4}$$

(c) Puisque l'on travaille avec la variable aléatoire X_3, l'urne contient trois boules numérotées de 1 à 3.
$P_{(I_3=1)}(X_3=2)$: l'évènement $(I_3=1)$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X_3=2)$, c'est-à-dire que l'on pioché la boule numéro 1 au premier tirage et qu'on l'on souhaite qu'il soit nécessaire d'effectuer deux tirages pour obtenir la boule numéro 1. Ceci est clairement impossible donc $P_{(I_3=1)}(X_3=2)=0$
$P_{(I_3=2)}(X_3=2)$:l'évènement $(I_3=2)$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X_3=2)$, c'est-à-dire que l'on pioché la boule numéro 2 au premier tirage et qu'on l'on souhaite qu'il soit nécessaire d'effectuer deux tirages pour obtenir la boule numéro 1. Par conséquent, après le premier tirage, l'urne contient uniquement la boule numéro 1 (les boules 2 et 3 sont retirées) et on souhaite piocher au second tirage la boule numéro 1 dans cette nouvelle urne. Cet évènement est évidemment certain et l'on a $P_{(I_3=2)}(X_3=2)=1$
$P_{(I_3=3)}(X_3=2)$: l'évènement $(I_3=3)$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X_3=2)$, c'est-à-dire que l'on pioché la boule numéro 3 au premier tirage et qu'on l'on souhaite qu'il soit nécessaire d'effectuer deux tirages pour obtenir la boule numéro 1. Par conséquent, après le premier tirage, l'urne contient les boules numéro 1 et 2 (la boule 3 est retirée) et on souhaite piocher au second tirage la boule numéro 1 dans cette nouvelle urne. La probabilité de piocher la boule numéro est évidemment égale à $\dfrac{1}{2}$ donc $P_{(I_3=2)}(X_3=2)=\dfrac{1}{2}$
Loi de X_3 : L'urne contient 3 boules numérotées 1,2,3 et il est évident que l'on peut obtenir la boule numéro 1 en un tirage (la piocher directement) ou en deux tirages (tirer la boule numéro 2, retirer la boule numéro de l'urne, puis piocher la boule numéro 1) ou en trois (en piochant successivement les boules 3,2,1) donc $X_3(\Omega)=\{1,2,3\}$.
$P(X_3=1)$: $(X_3=1)$ signifie que l'on obtient la boule numéro 1 au premier tirage donc $P(X_3=1)=\dfrac{1}{3}$
$P(X_3=2)$: $(X_3=2)$ signifie que l'on obtient la boule numéro 1 au second tirage. Le second tirage dépendant des résultats du premier tirage, c'est-à-dire des évènements $(I_3=1)$, $(I_3=2)$, $(I_3=3)$. On applique la formule des probabilités totales à ce système complet d'évènements et, en utilisant les calculs de probabilités conditionnelles précédents, on a

$$\begin{aligned}
P(X_3=2) &= P(I_3=1\cap X_3=2)+P(I_3=2\cap X_3=2)+P(I_3=3\cap X_3=2)\\
&= P(I_3=1)P_{(I_3=1)}(X_3=2)+P(I_3=2)P_{(I_3=2)}(X_3=2)+P(I_3=3)P_{(I_3=3)}(X_3=2)\\
&= \frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$P(X_3=3)$: Soit on utilise que $P(X_3=3)=1-P(X_3=1)-P(X_3=2)=\dfrac{1}{6}$, soit on considère que cela signifie que l'on pioche nécessairement la boule numéro, puis la boule numéro 2 et enfin la boule numéro 1 donc $P(X_3=3)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$.
En résumé, on a $P(X_3=1)=\dfrac{1}{3},\quad P(X_3=2)=\dfrac{1}{2},\quad P(X_3=3)=\dfrac{1}{6}$

4. (a) La variable X_n prend toutes les valeurs entières entre 1 et n. En effet, l'urne contient n boules numérotées de 1 à n, et si k désigne un entier entre 1 et n, on pioche pour commencer la boule numéro n, donc c'est la seule boule enlevée et on a effectué un tirage, puis la boule numéro $n-1$, donc c'est la seule boule enlevée et on a effectué 2 tirages, puis la boule numéro $n-2$, donc c'est la seule boule enlevée et on a effectué 3 tirages, etc, jusqu'à piocher la boule numéro $n-k+2$ au $(k-1)$-ième tirage et au k-ième tirage, on pioche la boule numéro 1le fait de piocher la boule numéro n puis la boule numéro $n-1$, etc, jusqu'à la boule numéro $n-k+1$ (on a effectué pour l'instant $k-1$ tirages).

(b) $P(X_n=1)$: L'urne contient n boules dont une seule numéro 1, on a $P(X_n=1)=\dfrac{1}{n}$
$P(X_n=2)$: L'urne contient n boules et on souhaite obtenir la boule numéro 2 au second tirage. La pioche du second tirage dépend fortement du numéro pioché au premier tirage (puisque la composition de l'urne s'en trouve modiifée). La famille $(I_n=k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ décrit le numéro pioché au premier tirage et forme un système complet d'évènements donc

$$P(X_n=2)=\underbrace{P(I_n=1\cap X_n=2)}_{=0}+P(I_n=2\cap X_n=2)+\cdots+P(I_n=n\cap X_n=2)$$

L'évènement $(I_n=1\cap X_n=2)$ est en effet impossible puisqu'il correspond au fait que la boule numéro 1 est tirée au premier tirage (évènement $(I_n=1)$) et qu'il est nécessaire d'effectuer deux tirages pour obtenir la boule numéro 1 (évènement $(X_n=2)$), ce qui est contradictoire.
Ensuite, en utilisant la question 2 puis le calcul de $P(X_n=1)$ (remarque que cette égalité est valable pour tout

entier n, en particulier en remplaçant n par $k-1$ dans la formule), on obtient

$$\begin{aligned} P(X_n=2) &= \sum_{k=2}^{n} P(I_n=k\cap X_n=2)=\sum_{k=2}^{n} P(I_n=k)P_{(I_n=k)}(X_n=2)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}P(X_{k-1}=1)=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}P(X_{k-1}=1)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \end{aligned}$$

(c) Comme précédemment, en utilisant le système complet d'évènements $(I_n=k)_{k\in[\![1,n]\!]}$, on a

$$P(X_n=j)=\sum_{k=1}^{n}P(I_n=k\cap X_n=j)$$

Puisque $j\geqslant 2$, on ne peut obtenir la boule numéro 1 au premier tirage donc l'évènement $(I_n=k\cap X_n=j)$ est impossible et en utilisant le calcul des probabilités conditionnelles de la question 2, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_n=j) &= \sum_{k=2}^{n}P(I_n=k\cap X_n=j)=\sum_{k=2}^{n}P(I_n=k)P_{(I_n=k)}(X_n=j)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}P(X_{k-1}=j-1)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n-1}P(X_q=j-1) \qquad (q=k-1) \end{aligned}$$

(d) D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} nP(X_n=j)-(n-1)P(X_{n-1}=j) &= \sum_{k=1}^{n-1}P(X_k=j-1)-\sum_{k=1}^{n-2}P(X_k=j-1)=P(X_{n-1}=j-1)\\ &\Leftrightarrow nP(X_n=j)=(n-1)P(X_{n-1}=j)+P(X_{n-1}=j-1)\\ &\Leftrightarrow P(X_n=j)=\frac{n-1}{n}P(X_{n-1}=j)+\frac{1}{n}P(X_{n-1}=j-1) \end{aligned}$$

5. Puisque $X_n(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et $X_{n-1}(\Omega)=[\![1,n-1]\!]$, en utilisant la définition des espérances $E(X_n)$ et $E(X_{n-1})$ ainsi que la formule récurrente de la question 4.d), on a

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=1}^{n}kP(X_n=k)=\sum_{k=1}^{n}k\left[\frac{n-1}{n}P(X_{n-1}=k)+\frac{1}{n}P(X_{n-1}=k-1)\right]\\ &= \frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n}kP(X_{n-1}=k)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kP(X_{n-1}=k-1)\\ &= \frac{n-1}{n}\left[n\underbrace{P(X_{n-1}=n)}_{=0}+\sum_{k=1}^{n-1}kP(X_{n-1}=k)\right]+\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}(q+1)P(X_{n-1}=q) \qquad (q=k-1)\\ &= \frac{n-1}{n}E(X_{n-1})+\frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n-1}(q+1)P(X_{n-1}=q) \qquad (P(X_{n-1}=0)=0)\\ &= \frac{n-1}{n}E(X_{n-1})+\frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n-1}qP(X_{n-1}=q)+\frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n-1}P(X_{n-1}=q)\\ &= \frac{n-1}{n}E(X_{n-1})+\frac{1}{n}E(X_{n-1})+\frac{1}{n}=E(X_{n-1})+\frac{1}{n} \end{aligned}$$

Calcul de $E(X_n)$: On a

$$\sum_{k=2}^{n}[E(X_k)-E(X_{k-1})]=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\Leftrightarrow\sum_{k=2}^{n}E(X_k)-\sum_{k=2}^{n}E(X_{k-1})=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\Leftrightarrow\sum_{k=2}^{n}E(X_k)-\sum_{k=1}^{n-1}E(X_k)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow\left[E(X_n)+\sum_{k=2}^{n-1}E(X_k)\right]-\left[\sum_{k=1}^{n-1}E(X_k)+E(X_1)\right]=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\Leftrightarrow E(X_n)-\underbrace{E(X_1)}_{=1}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow E(X_n)=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\Leftrightarrow E(X_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$