correction de l'exercice 1

Je laisse le soin au lecteur que chaque fonction sous le symbole intégrale est une fonction continue sur l'intervalle fermé d'intégration. Chacune de ces intégrales se calculent à l'aide de primitives :

$\boxed{I_1}$: La fonction $t \mapsto (t+1)(t+2)^2 = t^3 + 5t^2 + 8t + 4$ admet $t \mapsto \dfrac{t^4}{4} + \dfrac{5t^3}{3} + 4t^2 + 4t$ pour primitive donc

$$I_1 = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^3}{3} + 4t^2 + 4t\right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{34}{3}$$

$\boxed{I_2}$: La fonction $x \mapsto \sqrt{x}\,(x - 2\sqrt{x}) = x^{3/2} - 2x$ admet $x \mapsto \dfrac{x^{3/2}}{3/2} - x^2 = \dfrac{2x^{3/2}}{3} - x^2$ pour primitive donc

$$I_2 = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - x^2\right]_{x=0}^{x=4} = -\frac{16}{5} \qquad (\textit{remarque}: \ 4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8)$$

$\boxed{I_3}$: La fonction $u \mapsto 3^u = \exp(u \ln 3)$ admet $u \mapsto \dfrac{\exp(u\ln 3)}{\ln 3} = \dfrac{3^u}{\ln 3}$ pour primitive donc

$$I_3 = \left[\frac{3^u}{\ln 3}\right]_{u=1}^{u=2} = \frac{6}{\ln 3}$$

$\boxed{I_4}$: La fonction $y \mapsto \dfrac{1}{y\sqrt{y}} = y^{-3/2}$ admet pour primitive $y \mapsto \dfrac{y^{-1/2}}{-1/2} = -2y^{-1/2} = \dfrac{-2}{\sqrt{y}}$ donc

$$I_4 = \left[\frac{-2}{\sqrt{y}}\right]_{y=1}^{4} = 1$$

$\boxed{I_5}$: On reconnait un début de formule du type $u'e^u$. En posant $u = z^2 - z$, on a $u' = 2z - 1$ donc $(2z-1)\exp(z^2 - z) = u'\exp(u)$, dont une primitive est $e^u = \exp(z^2 - z)$, ce qui implique

$$I_5 = \left[\exp(z^2 - z)\right]_{z=0}^{z=1} = 0$$

$\boxed{I_6}$: On reconnait un début de formule du type $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$. En posant $u = 1 + a^3$, on a $u' = 3a^2 \Leftrightarrow \dfrac{u'}{3} = a^2$ donc $\dfrac{a^2}{\sqrt{1+a^3}} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{u'}{\sqrt{u}} = \dfrac{1}{3}.u'u^{-1/2}$ dont une primitive est $\dfrac{1}{3}.\dfrac{u^{1/2}}{1/2} = \dfrac{2}{3}u^{1/2} = \dfrac{2}{3}\sqrt{1+a^3}$, ce qui implique

$$I_6 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{1+a^3}\right]_{a=1}^{a=2} = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$\boxed{I_7}$: On reconnait un début de formule du type $\dfrac{u'}{u}$. En posant $u = 2 + 3c^{3/2}$, on a $u' = \dfrac{9}{2}c^{1/2} = \dfrac{9}{2}\sqrt{c} \Leftrightarrow 2\sqrt{c} = \dfrac{4}{9}u'$ donc $\dfrac{2\sqrt{c}}{2 + 3c^{3/2}} = \dfrac{4}{9}.\dfrac{u'}{u}$ dont une primitive est $\dfrac{4}{9}\ln|u| = \dfrac{4}{9}\ln\left|2 + 3c^{3/2}\right|$, ce qui implique

$$I_7 = \left[\frac{4}{9}\ln\left|2 + 3c^{3/2}\right|\right]_{c=1}^{c=2} = \frac{4}{9}\ln\left(2 + 6\sqrt{2}\right) - \frac{4}{9}\ln 5 = \frac{4}{5}\ln\left(\frac{2 + 6\sqrt{2}}{5}\right)$$

$\boxed{I_8}$: On reconnait un début de formule du type $u'u^5$. En posant $u = \ln b$, on a $u' = \dfrac{1}{b}$ donc $\dfrac{(\ln b)^5}{b} = u'u^5$ dont une primitive est $\dfrac{u^6}{6} = \dfrac{(\ln b)^6}{6}$, ce qui implique

$$I_8 = \left[\frac{(\ln b)^6}{6}\right]_{b=1}^{b=e} = \frac{1}{6}$$

$\boxed{I_9}$: On reconnait un début de formule du type $\dfrac{u'}{u}$. En posant $u' = e^{2t} + 2$, on a $u' = 2e^{2t} \Leftrightarrow e^{2t} = \dfrac{1}{2}u'$ donc $\dfrac{e^{2t}}{e^{2t}+2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{u'}{u}$ dont une primitive est $\dfrac{1}{2}\ln|u| = \dfrac{1}{2}\ln\left|e^{2t} + 2\right|$, ce qui implique

$$I_9 = \left[\frac{1}{2}\ln\left|e^{2t} + 2\right|\right]_{t=0}^{t=(\ln 2)/2} = \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right) \qquad (\textit{remarque}: \ e^{\ln 2} = 2)$$

$\boxed{I_{10}}$: On reconnait un début de formule du type $u'u$. En posant $u = \ln(3\gamma)$, on a $u' = \frac{(3\gamma)'}{(3\gamma)} = \frac{1}{\gamma}$ donc $\frac{\ln(3\gamma)}{\gamma} = u'u$ dont une primitive est $\frac{u^2}{2} = \frac{(\ln(3\gamma))^2}{2}$, ce qui implique

$$I_{10} = \left[\frac{(\ln(3\gamma))^2}{2}\right]_{\gamma=e}^{\gamma=e^3} = \frac{(\ln(3e^3))^2}{2} - \frac{(\ln(3e))^2}{2} = \frac{(\ln 3+3)^2 - (\ln 3+1)^2}{2} = 2\ln 3 + 4$$

$\boxed{I_{11}}$: On reconnait un début de formule du type $u'\exp(u)$. En posant $u = -\beta^5$, on a $u' = -5\beta^4 \Leftrightarrow \beta^4 = -\frac{1}{5}u'$ donc $\beta^4\exp(-\beta^5) = -\frac{1}{5}u'\exp(u)$ dont une primitive est $-\frac{1}{5}\exp(u) = -\frac{1}{5}\exp(-\beta^5)$, ce qui implique

$$I_{11} = \left[-\frac{1}{5}\exp(-\beta^5)\right]_{\beta=0}^{\beta=2} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-32}$$

$\boxed{I_{12}}$: On reconnait un début de formule du type $\frac{u'}{u^4}$. En posant $u = \alpha^2 - 2\alpha$, on a $u' = 2\alpha - 2 = 2(\alpha-1) \Leftrightarrow 1-\alpha = -\frac{1}{2}u'$ donc $\frac{1-\alpha}{(\alpha^2-2\alpha)^4} = -\frac{1}{2}\frac{u'}{u^4} = -\frac{1}{2}u'u^{-4}$ dont une primitive est $-\frac{1}{2}.\frac{u^{-3}}{-3} = \frac{1}{6u^3} = \frac{1}{6(\alpha^2-2\alpha)^3}$, ce qui implique

$$I_{12} = \left[\frac{1}{6(\alpha^2-2\alpha)^3}\right]_{\alpha=1/2}^{\alpha=3/2} = 0$$

$\boxed{I_{13}}$: On reconnait un début de formule du type $u'u^{3/2}$. En posant $u = x^3+1$, on a $u' = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}u'$ donc $x^2(x^3+1)^{3/2} = \frac{1}{3}u'u^{3/2}$ dont une primitive est $\frac{1}{3}.\frac{u^{5/2}}{5/2} = \frac{2}{15}\left(x^3+1\right)^{5/2}$, ce qui implique

$$I_{13} = \left[\frac{2}{15}\left(x^3+1\right)^{5/2}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{484}{15} \qquad (\textit{remarque}:\ 9^{5/2} = (9^{1/2})^5 = (\sqrt{9})^5 = 3^5 = 243)$$

$\boxed{I_{14}}$: On reconnait un début de formule du type $\frac{u'}{u^{2006}}$. En posant $u = 1+s^{2005}$, on a $u' = 2005.s^{2004} \Leftrightarrow s^{2004} = \frac{1}{2005}u'$ donc $\frac{s^{2004}}{(1+s^{2005})^{2006}} = \frac{1}{2005}\frac{u'}{u^{2006}} = \frac{1}{2005}u'u^{-2005}$ dont une primitive est

$$\frac{1}{2005}.\frac{u^{-2004}}{-2004} = -\frac{1}{2005\times 2004u^{2004}} = -\frac{1}{2005\times 2004(1+s^{2005})^{2004}}$$

ce qui implique

$$I_{14} = \left[-\frac{1}{2005\times 2004(1+s^{2005})^{2004}}\right]_{s=0}^{s=1} = -\frac{1}{2005\times 2004\times 2^{2004}} + \frac{1}{2005\times 2004} = \frac{1}{2005\times 2004}\left(1 - \frac{1}{2^{2004}}\right)$$

$\boxed{I_{15}}$: On reconnait une forme du type $u'\exp(u)$. En posant $u = -\sqrt{\zeta}$, on a $u' = -\frac{1}{2\sqrt{\zeta}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\zeta}} = -2u'$ donc $\frac{e^{-\sqrt{\zeta}}}{\sqrt{\zeta}} = -2u'\exp(u)$ dont une primitive est $-2\exp(u) = -2\exp(-\sqrt{\zeta})$, ce qui implique

$$I_{15} = \left[-2\exp(-\sqrt{\zeta})\right]_{\zeta=1}^{\zeta=4} = 2e^{-1} - 2e^{-2} = 2e^{-2}(e-1) = \frac{2(e-1)}{e^2}$$

$\boxed{I_{16}}$: On reconnait une formule du type $\frac{v'}{v}$. En posant $v = e^u + e^{-u}$, on a $v' = e^u + e^{-u}$ donc $\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{v'}{v}$ dont une primitive est $\ln|v| = \ln|e^u + e^{-u}|$, ce qui implique

$$I_{16} = \left[\ln\left|e^u + e^{-u}\right|\right]_{u=-4}^{u=4} = 0$$

$\boxed{I_{17}}$: On reconnait une formule du type $u'\exp(u)$. En posant $u = -\frac{3}{v^2} = -3v^{-2}$, on a $u' = 6v^{-3} = \frac{6}{v^3} \Leftrightarrow \frac{1}{v^3} = \frac{1}{6}u'$ donc $\frac{\exp(-3/v^2)}{v^3} = \frac{1}{6}u'\exp(u)$ dont une primitive est $\frac{1}{6}\exp(u) = \frac{1}{6}\exp\left(-\frac{3}{v^2}\right)$, ce qui implique

$$I_{17} = \left[\frac{1}{6}\exp\left(-\frac{3}{v^2}\right)\right]_{v=1}^{v=\sqrt{3}} = \frac{1}{6}e^{-1} - \frac{1}{6}e^{-3}$$

$\boxed{I_{18}}$: On reconnait une formule du type $\dfrac{u'}{\sqrt[3]{u}}$. En posant $u = 1+7y^5$, on a $u' = 35y^4 \Leftrightarrow y^4 = \dfrac{1}{35}u'$ donc $\dfrac{y^4}{\sqrt[3]{1+7y^5}} = \dfrac{1}{35}\dfrac{u'}{\sqrt[3]{u}} = \dfrac{1}{35}u'u^{-1/3}$ dont une primitive est $\dfrac{1}{35}.\dfrac{u^{2/3}}{2/3} = \dfrac{3}{70}u^{2/3} = \dfrac{3}{70}\left(1+7y^5\right)^{2/3}$, ce qui implique

$$I_{18} = \left[\frac{3}{70}\left(1+7y^5\right)^{2/3}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{70}(4-1) = \frac{9}{70} \qquad (\textit{remarque} :\ 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = ((2^3)^{1/3})^2 = 2^2 = 4)$$

correction de l'exercice 2

$\boxed{A}$: On pose $\begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{3x} & v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} A &= \left[x \times \frac{e^{3x}}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1} 1.\frac{e^{3x}}{3}dx = \frac{1}{3}e^{-3} + \frac{1}{3}e^{3} - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{-3} + \frac{1}{3}e^{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{1}{3}e^{-3} + \frac{1}{3}e^{3} + \frac{1}{9}e^{-3} - \frac{1}{9}e^{3} = \frac{4}{9}e^{-3} + \frac{2}{9}e^{3} \end{aligned}$$

$\boxed{B}$: On pose $\begin{cases} u = t^2+t & u' = 2t+1 \\ v' = e^{2t} & v = \dfrac{e^{2t}}{2} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$B = \left[(t^2+t)\frac{e^{2t}}{2}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 (2t+1)\frac{e^{2t}}{2}dt = e^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 (2t+1)e^{2t}dt$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on pose $\begin{cases} u = 2t+1 & u' = 2 \\ v' = e^{2t} & v = \dfrac{e^{2t}}{2} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2t+1)e^{2t}dt &= \left[(2t+1)\frac{e^{2t}}{2}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 2\frac{e^{2t}}{2}dt = \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \int_0^1 e^{2t}dt = \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} = e^2 \Rightarrow B = e^2 - \frac{1}{2}e^2 = \frac{e^2}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{C_n}$ On pose $\begin{cases} a = \ln(u) & a' = \dfrac{1}{u} \\ b' = u^n & b = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} C_n &= \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\ln(u)\right]_{u=1}^{e} - \int_1^e \frac{u^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{u}du = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_1^e u^n du = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_{t=1}^{e} \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

$\boxed{D}$ On pose $\begin{cases} a = \ln(u) & a' = \dfrac{1}{v} \\ b' = \dfrac{1}{v} & b = \ln|v| = \ln v \text{ (car } v \in [\sqrt{e}, e] \text{ donc } v > 0) \end{cases}$, ce qui nous donne

$$D = \left[(\ln v)^2\right]_{v=\sqrt{e}}^{v=e} - \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{v}\ln(v)dv = 1 - \frac{1}{4} - D \Leftrightarrow D = \frac{3}{4} - D \Leftrightarrow 2D = \frac{3}{4} \Leftrightarrow D = \frac{3}{8}$$

$\boxed{E}$ On pose $\begin{cases} u = \ln s & u' = \dfrac{1}{s} \\ v' = \sqrt{3s} = \sqrt{3}s^{1/2} & v = \sqrt{3}\dfrac{s^{3/2}}{3/2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}s^{3/2} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} E &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}s^{3/2}\ln s\right]_{s=1}^{s=4} - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{3}}s^{3/2} \times \frac{1}{s}ds = \frac{16}{\sqrt{3}}\ln 4 - \frac{2}{\sqrt{3}}\int_1^4 s^{1/2}ds = \frac{16}{\sqrt{3}}\ln 4 - \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{s^{3/2}}{3/2}\right]_{s=1}^{s=4} \\ &= \frac{16}{\sqrt{3}}\ln 4 - \frac{4}{3\sqrt{3}}(8-1) = \frac{16}{\sqrt{3}}\ln 4 - \frac{28}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

remarque $4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$)

$\boxed{F}$ On pose $\begin{cases} u = \ln(1+2t) & u' = \dfrac{(1+2t)'}{1+2t} = \dfrac{2}{1+2t} \\ v' = \dfrac{1}{(1+2t)^3} = (1+2t)^{-3} & v = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+2t)^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{4(1+2t)^2} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} F &= \left[-\frac{1}{4(1+2t)^2} \times \ln(1+2t)\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 -\frac{1}{4(1+2t)^2} \times \frac{2}{1+2t}dt = -\frac{1}{36}\ln 3 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{(1+2t)^3} \\ &= -\frac{1}{36}\ln 3 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \times \frac{(1+2t)^{-2}}{-2}\right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{1}{36}\ln 3 - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{(1+2t)^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{9} - \frac{1}{36}\ln 3 \end{aligned}$$

$\boxed{G}$ On pose $\begin{cases} u = \ln(x) & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 2x^3 + 1 & v = \dfrac{x^4}{2} + x \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} G &= \left[\left(\frac{x^4}{2} + x\right)\ln x\right]_{x=1}^{x=e^2} - \int_1^{e^2} \left(\frac{x^4}{2} + x\right)\frac{dx}{x} = e^8 + 2e^2 - \int_1^{e^2}\left(\frac{x^3}{2} + 1\right)dx = e^8 + 2e^2 - \left[\frac{x^4}{8} + x\right]_{x=1}^{x=e^2} \\ &= e^8 + 2e^2 - \frac{1}{8}e^8 - e^2 + \frac{9}{8} = \frac{7}{8}e^8 + e^2 + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$\boxed{H}$ On effectue 4 intégrations par parties successives, en intégrant systématiquement l'exponentielle et en dérivant la puissance, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} H &= \left[y^4 e^y\right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 4y^3 e^y dy = e - 4\int_0^1 y^3 e^y dy = e - 4\left(\left[y^3 e^y\right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 3y^2 e^y dy\right) = e - 4\left(e - 3\int_0^1 y^2 e^y dy\right) \\ &= -3e + 12\int_0^1 y^2 e^y = -3e + 12\left(\left[y^2 e^y\right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 2ye^y dy\right) = -3e + 12\left(e - 2\int_0^1 ye^y dy\right) = 9e - 24\int_0^1 ye^y dy \\ &= 9e - 24\left(\left[ye^y\right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 1e^y dy\right) = 9e - 24\left(e - \int_0^1 e^y dy\right) = -15e + 24\int_0^1 e^y dy = -15e + 24\left[e^y\right]_{y=0}^{y=1} \\ &= -15e + 24(e-1) = 9e - 24 \end{aligned}$$

$\boxed{I}$ On effectue trois intégrations par parties successives, en intégrant systématiquement la puissance et en dérivant la puissance du logarithme ($\left[(\ln z)^k\right]' = k(\ln z)'(\ln z)^{k-1} = k\dfrac{(\ln z)^{k-1}}{z}$), ce qui nous donne

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{z^3}{3}(\ln z)^3\right]_{z=1}^{e} - \int_1^e \frac{z^3}{3} \times \frac{3(\ln z)^2}{z}dz = \frac{e^3}{3} - \int_1^e z^2(\ln z)^2 dz = \frac{e^3}{3} - \left(\left[\frac{z^3}{3}(\ln z)^2\right]_{z=1}^{z=e} - \int_1^e \frac{z^3}{3} \times \frac{2\ln z}{z}dz\right) \\ &= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_1^e z^2 \ln z\, dz\right) = \frac{2}{3}\int_1^e z^2 \ln z\, dz = \frac{2}{3}\left(\left[\frac{z^3}{3}\ln z\right]_{z=1}^{z=e} - \int_1^e \frac{z^3}{3} \times \frac{1}{z}dz\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e z^2\, dz\right) \\ &= \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{9}\int_1^e z^2 dz = \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{9}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=e} = \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{27}e^3 + \frac{2}{27} = \frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27} \end{aligned}$$

$\boxed{J}$ On pose $\begin{cases} u = \ln(3x+1) & u' = \dfrac{(3x+1)'}{3x+1} = \dfrac{3}{3x+1} \\ v' = (3x+1)^3 & v = \dfrac{1}{3}.\dfrac{(3x+1)^4}{4} = \dfrac{(3x+1)^4}{12} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{(3x+1)^4}{12}\ln(3x+1)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{(3x+1)^4}{12} \times \frac{3}{3x+1}dx = \frac{64}{3}\ln 4 - \frac{1}{4}\int_0^1 (3x+1)^3 dx \\ &= \frac{64}{3}\ln 4 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} \times \frac{(3x+1)^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{64}{3}\ln 4 - \frac{1}{48}(256-1) = \frac{64}{3}\ln 4 - \frac{85}{16} \end{aligned}$$

$\boxed{K}$ En remarquant que $\ln y = 1 \times \ln y$, on pose $\begin{cases} u = \ln y & u' = \dfrac{1}{y} \\ v' = 1 & v = y \end{cases}$, ce qui nous donne

$$K = [y \ln y]_{y=1}^{y=e} - \int_1^e y \times \frac{1}{y} dy = e - \int_1^e dy = e - [y]_{y=1}^{y=e} = 1$$

$\boxed{L}$ En remarquant que $\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) = 1 \times \ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$, on pose $\begin{cases} u = \ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) & u' = \dfrac{(1+\frac{1}{t})'}{1+\frac{1}{t}} = \dfrac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t+1}{t}} = -\dfrac{1}{t(t+1)} \\ v' = 1 & v = t \end{cases}$,

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} L &= \left[t \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_{t=1}^{t=2} - \int_1^2 t\left(-\frac{1}{t(t+1)}\right) dt = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln 2 + \int_1^2 \frac{dt}{t+1} = 2\ln 3 - 2\ln 2 - \ln 2 + [\ln(t+1)]_{t=1}^{t=2} \\ &= 2\ln 3 - 3\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = 3\ln 3 - 4\ln 2 \end{aligned}$$

$\boxed{M}$ On pose $\begin{cases} u = \ln\left(1+\dfrac{1}{s}\right) & u' = \dfrac{(1+\frac{1}{s})'}{1+\frac{1}{s}} = \dfrac{-\frac{1}{s^2}}{\frac{s+1}{s}} = -\dfrac{1}{s(s+1)} \\ v' = 1+2s & v = s+s^2 \end{cases}$, ce qui nous donne

$$M = \left[(s+s^2)\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right]_{s=1}^{s=2} - \int_1^2 (s+s^2)\left(-\frac{1}{s(s+1)}\right) ds = 6\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2\ln 2 + \int_1^2 ds = 6\ln 3 - 8\ln 2 + [s]_{s=1}^{s=2} = 6\ln 3 - 8\ln 2 + 1$$

$\boxed{N}$ On pose $\begin{cases} u = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} & u' = \dfrac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \dfrac{\frac{2}{(1-x)^2}}{2\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}} = \dfrac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^2\sqrt{1+x}} = \dfrac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{1+x}} \\ v' = 1-2x & v = x - x^2 \end{cases}$,ce qui nous donne

$$\begin{aligned} N &= \left[(x-x^2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right]_{x=0}^{x=1/2} - \int_0^{1/2} (x-x^2)\frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{1+x}} dx \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{3} - \int_0^{1/2} \frac{x(1-x)}{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} dx = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} dx = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

On remarque dans la fonction intervenant dans la dernière intégrale est de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$. En posant $u = 1-x^2$, on a $u' = -2x \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}u'$ donc $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}} = -\dfrac{1}{2}u'u^{-1/2}$ dont une primitive est $-\dfrac{1}{2} \times \dfrac{u^{1/2}}{1/2} = -u^{1/2} = -\sqrt{u} = -\sqrt{1-x^2}$, ce qui permet d'écrire

$$N = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{3}{4}\sqrt{3} - 1$$

correction de l'exercice 3

a) On pose $\begin{cases} u = \ln(x) & a' = \dfrac{1}{x} \\ b' = \dfrac{1}{x} & b = \ln|x| = \ln x \text{ (car } x \in [a, 1/a] \text{ donc } x > 0) \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^{1/a} (\ln x)\frac{1}{x} dx = \left[(\ln x)^2\right]_{x=a}^{x=1/a} - \int_a^{1/a} \frac{1}{x}(\ln x) dx = (\ln\left(\frac{1}{a}\right))^2 - (\ln a)^2 - I(a) \\ I(a) &= (-\ln a)^2 - (\ln a)^2 - I(a) = -I(a) \Leftrightarrow 2I(a) = 0 \Leftrightarrow I(a) = 0 \end{aligned}$$

b) On pose $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, quand $x = a$, $t = \frac{1}{a}$ et quand $x = \frac{1}{a}$, $t = a$ donc

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_{1/a}^{a} \ln\left(\frac{1}{t}\right) t \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = -\int_{1/a}^{a} (-\ln t)\, \frac{dt}{t} = \int_{1/a}^{a} \frac{\ln t}{t} dt = -\int_{a}^{1/a} \frac{\ln t}{t} dt \quad \text{(par le relation de Chasles)} \\ I(a) &= -I(a) \Leftrightarrow 2I(a) = 0 \Leftrightarrow I(a) = 0 \end{aligned}$$

correction de l'exercice 4

A l'aide de changement de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :

$\boxed{A}$ On pose $z = 3w + 1 \Leftrightarrow w = \frac{z-1}{3}$, $dw = \frac{dz}{3}$, quand $w = 0$, $z = 1$, quand $w = 1$, $z = 4$, ce qui nous donne

$$A = \int_1^4 \frac{z-1}{3}\sqrt{z}\frac{dz}{3} = \frac{1}{9}\int_1^4 \left(z^{3/2} - z^{1/2}\right) dz = \frac{1}{9}\left[\frac{z^{5/2}}{5/2} - \frac{z^{3/2}}{3/2}\right]_{z=1}^{z=4} = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{5} \times 2^5 - \frac{2}{3} \times 2^3 - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{116}{135}$$

remarque : $4^{5/2} = (4^{1/2})^5 = (\sqrt{4})^5 = 2^5$, $4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = (\sqrt{4})^3 = 2^3$

$\boxed{B}$ On pose $x = \ln t \Leftrightarrow t = e^x$, $dt = e^x dx$, quand $t = 1$, $x = 0$ et quand $t = e$, $x = 1$, ce qui nous donne

$$B = \int_0^1 \frac{x}{e^x} e^x dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{C}$ On pose $v = e^x \Leftrightarrow x = \ln v$, $dx = \frac{dv}{v}$, quand $x = 0$, $v = 1$ et quand $x = 1$, $v = e$, ce qui nous donne

$$C = \int_1^e \frac{1}{v+1}\frac{dv}{v} = \int_1^e \frac{1}{v(v+1)} dv = \int_1^e \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) dv = [\ln|v| - \ln|v+1|]_{v=1}^{v=e} = 1 - \ln(e+1) + \ln 2$$

$\boxed{D}$ On pose $t = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow tx + t = x \Leftrightarrow x(1-t) = t \Leftrightarrow x = \frac{t}{1-t}$, $dx = \left(\frac{t}{1-t}\right)' dt = \frac{dt}{(1-t)^2}$.

Quand $x = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{3}$ et quand $x = 1$, $t = \frac{1}{2}$ donc

$$D = \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{\left(\frac{t}{1-t}\right)\left(\frac{t}{1-t} + 1\right)} \ln t \frac{dt}{(1-t)^2} = \int_{1/3}^{1/2} \frac{(1-t)^2}{t} \ln t \frac{dt}{(1-t)^2} = \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{t} dt$$

Pour cette dernière intégrale, on procède par intégration par partie en intégrant $\frac{1}{t}$ et en dérivant $\ln t$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{t} dt &= \left[(\ln t)^2\right]_{t=1/3}^{t=1/2} - \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{t} dt \Leftrightarrow 2\int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{t} dt = \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 - \left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 \Leftrightarrow 2\int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{t} dt = (\ln 2)^2 - (\ln 3)^2 \\ \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{t} dt &= \frac{(\ln 2)^2 - (\ln 3)^2}{2} \Rightarrow D = \frac{(\ln 2)^2 - (\ln 3)^2}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{E}$ On pose $\alpha = s^3 + 1 \Leftrightarrow s = (\alpha - 1)^{1/3}$, $ds = \frac{1}{3}(\alpha - 1)^{-2/3} d\alpha$, quand $s = 1$, $\alpha = 2$ et quand $s = 2$, $\alpha = 9$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} E &= \int_2^9 \frac{1}{(\alpha-1)^{1/3} s} \times \frac{1}{3} \times (\alpha - 1)^{-2/3} dd\alpha = \frac{1}{3}\int_2^9 \frac{(\alpha-1)^{-1/3}(\alpha-1)^{-2/3}}{\alpha} d\alpha = \frac{1}{3}\int_2^9 \frac{(\alpha-1)^{-1}}{\alpha} d\alpha \\ &= \frac{1}{3}\int_2^9 \frac{d\alpha}{\alpha(\alpha-1)} = \frac{1}{3}\int_2^9 \left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha}\right) d\alpha = \frac{1}{3}\left[\ln|\alpha-1| - \ln|\alpha|\right]_{\alpha=2}^{\alpha=9} = \frac{1}{3}(\ln 8 - \ln 9 + \ln 2) \\ &= \frac{\ln 2^3 - \ln 3^2 + \ln 2}{3} = \frac{3\ln 2 - 2\ln 3 + \ln 2}{3} = \frac{3\ln 4 - 2\ln 3}{3} \end{aligned}$$

$\boxed{F}$ On pose $v = u^2+1 \Leftrightarrow u = -\sqrt{v-1}$ (car $u \in [-1,0]$), $du = -\dfrac{dv}{2\sqrt{v-1}}$, quand $u=-1$, $v=2$ et quand $u=0$, $v=1$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} F &= \int_2^1 \frac{(-\sqrt{v-1})^3}{v\sqrt{v}}\left(-\frac{dv}{2\sqrt{v-1}}\right) = \frac{1}{2}\int_2^1 \frac{(v-1)^{3/2}}{v^{3/2}}\frac{dv}{(v-1)^{1/2}} = \frac{1}{2}\int_2^1 \frac{v-1}{v^{3/2}}dv = \frac{1}{2}\int_2^1\left(\frac{1}{v^{1/2}}-\frac{1}{v^{3/2}}\right)dv \\ &= \frac{1}{2}\int_2^1\left(v^{-1/2}-v^{-3/2}\right)dv = \frac{1}{2}\left[\frac{v^{1/2}}{1/2}-\frac{v^{-1/2}}{-1/2}\right]_{v=2}^{v=1} = \frac{1}{2}\left[2v^{1/2}+2v^{-1/2}\right]_{v=2}^{v=1} = \left[v^{1/2}+v^{-1/2}\right]_{v=2}^{v=1} \\ &= 2-\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} = 2-\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$\boxed{G}$ On pose $x = t^2+1 \Leftrightarrow t = \sqrt{x-1}$ (puisque $t \in [0,3]$) et $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x-1}}$. Quand $t=0$, $x=1$ et quand $t=3$, $x=10$, ce qui nous donne

$$G = \int_1^{10} \frac{\sqrt{x-1}\times\ln x}{x}\frac{dx}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\int_1^{10}\frac{\ln x}{x}dx$$

Pour cette dernière intégrale, on procède par une intégration par parties en intégrant $\dfrac{1}{x}$ et en dérivant $\ln x$, ce qui nous donne

$$\int_1^{10}\frac{\ln x}{x}dx = \left[(\ln x)^2\right]_{x=1}^{x=10} - \int_1^{10}\frac{\ln x}{x}dx \Leftrightarrow 2\int_1^{10}\frac{\ln x}{x}dx = (\ln 10)^2 \Leftrightarrow \int_1^{10}\frac{\ln x}{x}dx = \frac{(\ln 10)^2}{2} \Rightarrow G = \frac{(\ln 10)^2}{4}$$

correction de l'exercice 5

Par le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned} (x+1)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k \Rightarrow \int_0^1 (x+1)^n dx = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}x^k\right) \Leftrightarrow \left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\int_0^1 x^k dx \\ &\Leftrightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{x=0}^{x=1} \Leftrightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} \\ (x-1)^n &= \sum_{k=0}^n\binom{n}{k}x^k(-1)^{n-k} \Rightarrow \int_0^1(x-1)^n dx = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}x^k\right) \Leftrightarrow \left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \sum_{k=0}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k dx \\ &\Leftrightarrow \frac{-(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{x=0}^{x=1} \Leftrightarrow \frac{(-1)^n(-1)^2}{n+1} = \sum_{k=0}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} \Leftrightarrow \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=0}^n\frac{(-1)^{n-k}}{k+1}\binom{n}{k} \end{aligned}$$

correction de l'exercice 6

La fonction ln étant croissante sur $]-1,+\infty[$, on a $\forall x \in [0,+\infty[$, $0 = \ln(1+0) \leqslant \ln(1+x)$. Ensuite, on introduit la fonction $g(x) = \ln(1+x)-x$. Sa dérivée est donnée par $g'(x) = \dfrac{1}{1+x}-1 = \dfrac{-x}{1+x}$ qui est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $g(0)=0$, on en déduit que

$$\forall x \geqslant 0, \quad g(x) \leqslant g(0) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leqslant x$$

On a ainsi démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, le réel x^n est positif donc on peut remplacer le x dans l'inégalité précédente par x^n, ce qui nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n.$$

En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 0dx \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)dx \leqslant \int_0^1 x^n dx \Rightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$, l'inégalité précédente permet d'appliquer le théorème d'encadrement donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

correction de l'exercice 7
Puisque x, $x-1$ et $\sqrt{x^2-1}$ sont positifs lorsque $x\in]1,+\infty[$, on a

$$\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}\leqslant x\Leftrightarrow x^2-1\leqslant x^2\Leftrightarrow -1\leqslant 0$$

cette dernière inégalité étant vraie, on en déduit que $\forall x\in]1,+\infty[,\ \dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\leqslant\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow x-1\leqslant\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow(x-1)^2\leqslant x^2-1\Leftrightarrow x^2-2x+1\leqslant x^2-1\Leftrightarrow 2\leqslant 2x\Leftrightarrow 1\leqslant x$$

cette dernière inégalité étant vraie, on en déduit que $\forall x\in]1,+\infty[,\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\leqslant\dfrac{1}{x-1}$, ce qui montre que

$$\forall x\in]1,+\infty[,\quad \frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\leqslant\frac{1}{x-1}$$

Puisque $n\geqslant 2$, l'intervalle $[2,n]$ est inclu dans l'intervalle $]1,+\infty[$, ce qui nous autorise à intégrer l'encadrement précédent sur $[2,n]$

$$\forall n\geqslant 2,\quad \int_2^n\frac{dx}{x}\leqslant\int_2^n\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\leqslant\int_2^n\frac{dx}{x-1}\Leftrightarrow[\ln|x|]_{x=2}^{x=n}\leqslant I_n\leqslant[\ln|x-1|]_{x=2}^{x=n}\Leftrightarrow\ln n-\ln 2\leqslant I_n\leqslant\ln(n-1)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln n-\ln 2=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n-1)=+\infty$, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=+\infty$. Ensuite, en divisant l'encadrement précédent par $\ln n$, on a

$$\begin{aligned}1-\frac{\ln 2}{\ln n}&\leqslant\frac{I_n}{\ln n}\leqslant\frac{\ln(n-1)}{\ln}=\frac{\ln\left[n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln}=\frac{\ln n+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}=1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\\&\Rightarrow 1-\frac{\ln 2}{\ln n}\leqslant\frac{I_n}{\ln n}\leqslant 1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln n=+\infty$, il est immédiat que $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}=\lim\limits_{n\to+\infty}1-\dfrac{\ln 2}{\ln n}=0$ et le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_n}{\ln n}=1$, ce que l'on peut encore écrire $I_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$.

correction de l'exercice 8
Pour comparer deux intégrales, il existe deux approches.
Soit les intégrales portent sur un même segment mais sur des fonctions distinctes : on utilise que $f-g$ est de signe constant sur un segment I alors $\int\limits_I f-\int\limits_I g=\int\limits_I(f-g)$ qui est du signe de $f-g$ sur I (lorsque les bornes sont dans l'ordre croissant)
Soit les intégrales portent sur une même fonction mais sur des intervalles distincts : on utilise la relation de Chasles $\int\limits_a^b f-\int\limits_a^c f=\int\limits_c^b f$ puis le signe de f sur le segment $[c,b]$ pour obtenir le signe de $\int\limits_c^b f$ donc de $\int\limits_a^b f-\int\limits_a^c f$ (lorsque les bornes sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $c\leqslant b$)
$\boxed{a_n}$ (fonction commune)

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{n+1}\exp(-t^2)dt-\int_0^n\exp(-t^2)dt=\int_n^{n+1}\underbrace{\exp(-t^2)}_{\geqslant 0\text{ sur }[n,n+1]}dt\geqslant 0\quad(\text{car }n\leqslant n+1)$$

(puisque $n\leqslant n+1$) donc $a_{n+1}-a_n\geqslant 0$, ce qui implique que la suite $(a_n)_n$ est croissante.
$\boxed{b_n}$ (fonction commune)

$$b_{n+1}-b_n=\int_0^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\int_0^n\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\int_n^{n+1}\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\geqslant 0\text{ sur }[n,n+1]}dx\geqslant 0\quad(\text{car }n\leqslant n+1)$$

$b_{n+1} - b_n \geqslant 0$, ce qui implique que la suite $(b_n)_n$ est croissante.
$\boxed{c_n}$ (fonction commune)

$$c_{n+1} - c_n = \int_0^{1/(n+1)} \frac{x}{1+x^3}dx - \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^3}dx = \int_{1/n}^{1/(n+1)} \frac{x}{1+x^3}dx = -\overbrace{\int_{1/(n+1)}^{1/n} \underbrace{\frac{x}{1+x^3}}_{\geqslant 0 \text{ sur } [1/(n+1),1/n]}}^{\geqslant 0} dx \leqslant 0 \quad (\text{car } \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n})$$

$c_{n+1} - c_n \leqslant 0$, ce qui implique que la suite $(c_n)_n$ est décroissante.
$\boxed{d_n}$ (fonction commune) Lorsque $n \geqslant 1$ et $x \in [n, n+1]$, alors $x \geqslant 1 \Rightarrow 1 - x \leqslant 0 \Rightarrow (1-x)^3 \leqslant 0$ et l'on a

$$d_{n+1} - d_n = \int_1^{n+1} (1-x)^3 e^x dx - \int_1^n (1-x)^3 e^x dx = \int_n^{n+1} (1-x)^3 e^x dx \int_n^{n+1} \underbrace{(1-x)^3 e^x}_{\leqslant 0 \text{ sur } [n,n+1]} dx \leqslant 0 \quad (\text{car } n \leqslant n+1)$$

$d_{n+1} - d_n \leqslant 0$, ce qui implique que la suite $(d_n)_n$ est décroissante.
$\boxed{e_n}$ (intervalle commun)

$$e_{n+1} - e_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{\overbrace{x^n}^{\geqslant 0}\ \overbrace{(x-1)}^{\leqslant 0}}{\underbrace{1+x}_{\geqslant 0}}dx \leqslant 0 \quad (\text{car } 0 \leqslant 1)$$

donc $e_{n+1} - e_n \leqslant 0$, ce qui implique que la suite $(e_n)_n$ est décroissante.
$\boxed{f_n}$ (intervalle commun)

$$f_{n+1} - f_n = \int_1^2 (\ln t)^{n+1} dx - \int_1^2 (\ln t)^n = \int_1^2 \left[(\ln t)^{n+1} - (\ln t)^n\right] dx = \int_1^2 \overbrace{(\ln t)^n}^{\geqslant 0} \overbrace{[(\ln t) - 1]}^{\leqslant 0} dx \leqslant 0 \quad (\text{car } 1 \leqslant 2 \text{ et } \ln t \leqslant \ln 2 \leqslant \ln e = 1)$$

donc $f_{n+1} - f_n \leqslant 0$, ce qui implique que la suite $(f_n)_n$ est décroissante.
$\boxed{g_n}$ (intervalle commun)

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= \int_0^1 x \exp(-(n+1)^2 x)dx - \int_0^1 x \exp(-n^2 x)dx = \int_0^1 x[\exp(-(n+1)^2 x) - \exp(-n^2 x)]dx \\ &= \int_0^1 x[\exp(-n^2 x - 2nx - x) - \exp(-n^2 x)]dx \\ &= \int_0^1 \underbrace{x}_{\geqslant 0} \underbrace{\exp(-n^2 x)}_{\geqslant 0} \overbrace{[\exp(\underbrace{-2nx - x}_{\leqslant 0}) - 1]}^{\leqslant 0} dx \leqslant 0 \quad (\text{car } 0 \leqslant 1 \text{ et } e^a \leqslant e^0 = 1 \text{ lorsque } a \leqslant 0) \end{aligned}$$

donc $g_{n+1} - g_n \leqslant 0$, ce qui implique que la suite $(g_n)_n$ est décroissante
$\boxed{h_n}$ (intervalle commun)

$$\begin{aligned} h_{n+1} - h_n &= \int_{-1}^0 x \exp((n+1)^2 x)dx - \int_{-1}^0 x \exp(n^2 x)dx = \int_{-1}^0 x[\exp((n+1)^2 x) - \exp(n^2 x)]dx \\ &= \int_{-1}^0 x[\exp(n^2 x + 2nx + x) - \exp(n^2 x)]dx \\ &= \int_{-1}^0 \underbrace{x}_{\leqslant 0} \underbrace{\exp(n^2 x)}_{\geqslant 0} \overbrace{[\exp(\underbrace{2nx + x}_{\leqslant 0}) - 1]}^{\leqslant 0} dx \geqslant 0 \quad (\text{car } -1 \leqslant 0 \text{ et } e^a \leqslant e^0 = 1 \text{ lorsque } a \leqslant 0) \end{aligned}$$

donc $h_{n+1} - h_n \geqslant 0$, ce qui implique que la suite $(h_n)_n$ est croissante
$\boxed{i_n}$ (fonction commune)

$$i_{n+1} - i_n = \int_1^{1/(n+1)} (\ln y)^3 dy - \int_1^{1/n} (\ln y)^3 dy = \int_{1/n}^{1/(n+1)} (\ln y)^3 dy = -\underbrace{\int_{1/(n+1)}^{1/n} \overbrace{\underbrace{(\ln y)}_{\leqslant 0}{}^3}^{\leqslant 0} dy}_{\leqslant 0} \geqslant 0 \text{ (car } \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } y \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1)$$

donc $i_{n+1} - i_n \geqslant 0$, ce qui implique que la suite $(i_n)_n$ est croissante.
$\boxed{j_n}$ (intervalle commun)

$$\begin{aligned} j_{n+1} - j_n &= \int_1^2 \frac{u^{1/(n+1)}}{1+u} du - \int_1^2 \frac{u^{1/n}}{1+u} du = \int_1^2 \frac{u^{1/(n+1)} - u^{1/n}}{1+u} du = \int_1^2 u^{1/(n+1)} \frac{1 - u^{1/n - 1/(n+1)}}{1+u} du \\ &= \int_1^2 \underbrace{u^{1/(n+1)}}_{\geqslant 0} \frac{\overbrace{1 - u^{1/n(n+1)}}^{\leqslant 0}}{\underbrace{1+u}_{\geqslant 0}} du \leqslant 0 \quad (\text{car } 1 \leqslant 2 \text{ et } u^\alpha \geqslant 1 \text{ lorsque } \alpha \geqslant 0 \text{ et } u \geqslant 1) \end{aligned}$$

donc $j_{n+1} - j_n \geqslant 0$, ce qui implique que la suite $(j_n)_n$ est décroissante.
$\boxed{k_n}$ (intervalle commun)

$$\begin{aligned} k_{n+1} - k_n &= \int_0^1 \frac{u}{1+u^{n+1}} du - \int_0^1 \frac{u}{1+u^n} du = \int_0^1 \frac{u(1+u^n - 1 - u^{n+1})}{(1+u^n)(1+u^{n+1})} du = \int_0^1 \frac{u(u^n - u^{n+1})}{(1+u^n)(1+u^{n+1})} du \\ &= \int_0^1 \frac{\overbrace{u^{n+1}}^{\geqslant 0}\overbrace{(1-u)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{(1+u^n)(1+u^{n+1})}_{\geqslant 0}} du \geqslant 0 \quad (\text{car } 0 \leqslant 1) \end{aligned}$$

donc $k_{n+1} - k_n \geqslant 0$, ce qui implique que la suite $(k_n)_n$ est croissante.
$\boxed{l_n}$ (fonction commune). Pour $n \geqslant 1$, on a

$$l_{n+1} - l_n = \int_1^{\ln(n+1)} \frac{t}{1-\exp(t)} dt - \int_1^{\ln n} \frac{t}{1-\exp(t)} dt = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{\overbrace{t}^{\geqslant 0}}{\underbrace{1-\exp(t)}_{\leqslant 0}} dt \leqslant 0 \quad (\text{car } n \leqslant n+1 \text{ et } e^t \geqslant e^{\ln n} = n \geqslant 1)$$

donc $l_{n+1} - l_n \leqslant 0$, ce qui implique que la suite $(l_n)_n$ est décroissante.

correction de l'exercice 9
L'idée pour faire apparaitre des expressions de $\frac{k}{n}$!!! (avec un $\frac{1}{n}$ devant tout de même !!)
$\boxed{a_n}$ $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$ qui est la somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^2$ sur le segment $[0,1]$. Cette dernière fonction étant continue sur cet intervalle, on peut donc appliquer le théorème sur les sommes de Riemann donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}$$

Remarque : Puisque $a_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2$ *et que* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}$, *on en déduit que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{3}$$

$\boxed{b_n}$ $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\exp\left(\frac{k}{n}\right)$, qui est la somme de Riemann de la fonction $x \mapsto xe^x$ sur le segment $[0,1]$. Cette dernière fonction étant continue sur cet intervalle, on peut donc appliquer le théorème sur les sommes de Riemann donc

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 1e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_{x=0}^{x=1} = 1$$

Remarque : Puisque $b_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\exp\left(\frac{k}{n}\right)$ *et que* $\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$, *on en déduit que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\exp\left(\frac{k}{n}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\exp\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k\exp\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$$

$\boxed{c_n}$ $c_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+n\times\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$, qui est la somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur le segment $[0,1]$. Cette dernière fonction étant continue sur cet intervalle, on peut donc appliquer le théorème sur les sommes de Riemann donc

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln|1+x|]_{x=0}^{x=1} = \ln 2$$

$\boxed{d_n}$ $d_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{k^2+n^2} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n\left(\frac{k}{n}\right)}{n^2\times\left(\frac{k}{n}\right)^2+n^2} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2}\times\frac{\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$, qui est la somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ sur le segment $[0,1]$. Cette dernière fonction étant continue sur cet intervalle, on peut donc appliquer le théorème sur les sommes de Riemann donc

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\ln 2}{2}$$

correction de l'exercice 10

1. On commence par expliciter le quotient. On a $\frac{A_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+1}$, qui est la somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ sur le segment $[0,1]$. Puisque $\alpha \geqslant 0$, cette dernière fonction est continue sur cet intervalle, on peut donc appliquer le théorème sur les sommes de Riemann donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_n}{n^{\alpha+1}} = \int_0^1 x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\alpha+1} \Leftrightarrow \frac{A_n}{n^{\alpha+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha+1} \Leftrightarrow A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

2. Cela serait bien un malheur que B_n ne soit pas une somme de Riemann (je ne parie pas mon goûter :-)).

$$B_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(n+k)^3} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n^2\left(\frac{k}{n}\right)^2}{n^3\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)\right)^3} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}.$$

Cette dernière somme est la somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$ sur le segment $[0,1]$. Cette dernière fonction est continue sur cet intervalle, on peut donc appliquer le théorème sur les sommes de Riemann donc

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx = \left[\frac{1}{3}\ln\left|1+x^3\right|\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\ln 2}{3}$$