correction de l'exercice 1

1. Pour tout entier n, la fonction $x \mapsto (\ln x)^n$ est continue et positive sur le segment $[1,e]$ et l'intégration porte sur des bornes croissantes ($1 \leqslant e$) donc $I_n \geqslant 0$. Ensuite, on a
$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e (\ln x)^{n+1}dx - \int_1^e (\ln x)^n dx = \int_1^e \left[(\ln x)^{n+1} - (\ln x)^n\right] dx = \int_1^e \underbrace{(\ln x)^n}_{\geqslant 0 \text{ sur } [1,e]} \underbrace{[(\ln x) - 1]}_{\leqslant 0 \text{ sur } [1,e]} dx \leqslant 0 \quad (\text{car } 1 \leqslant e)$$
donc la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

2. **Analyse du problème** : L'intégrale I_{n+1} fait intervenir une puissance $n+1$ de $\ln x$ et l'intégrale I_n fait intervenir une puissance n de $\ln x$. Pour exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et I_n doit comporter un facteur $n+1$ (l'exposant de $\ln x$ dans I_{n+1}), c'est-à-dire que l'on doit utiliser un procédé de calcul intégral qui transforme une puissance $n+1$ (de $\ln x$) en une puissance n (de $\ln x$) et qui fait apparaitre le facteur $n+1$. L'intégration par partie est un bon candidat si l'on dérive $x \mapsto (\ln x)^{n+1}$. Par contre, "il n'y a pas d'autre fonction" sous le symbole intégrale. On y remédie aisément grâce à l'astuce $(\ln x)^{n+1} = 1 \times (\ln x)^{n+1}$.
Synthèse : On pose $\begin{cases} u = (\ln x)^{n+1} & u' = (n+1)(\ln x)'(\ln x)^n = (n+1)\dfrac{(\ln x)^n}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{cases}$, ce qui nous donne
$$I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} = \left[x(\ln x)^{n+1}\right]_{x=1}^{x=e} - \int_1^e x(n+1)\frac{(\ln x)^n}{x}dx = e - (n+1)\int_1^e (\ln x)^n dx = e - (n+1)I_n$$

3. D'après la question 1, on a $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, l'égalité $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$, obtenue à la question 2, combinée au fait que I_{n+1} soit positif, implique que
$$e - (n+1)I_n \geqslant 0 \Leftrightarrow e \geqslant (n+1)I_n \Leftrightarrow \frac{e}{n+1} \geqslant I_n.$$

4. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$, on peut donc appliquer le théorème d'encadrement à l'encadrement de la question 3 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. Ensuite, en passant à la limite dans l'égalité $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$, on obtient
$$0 = e - \lim_{n\to+\infty}(n+1)I_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(n+1)I_n = e \Leftrightarrow (n+1)I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e \Leftrightarrow I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n} \Leftrightarrow I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$$

correction de l'exercice 2

1. **Analyse du problème** : La majoration doit faire intervenir $\dfrac{e}{(n+1)!}$ et l'intégrale I_n fait intervenir $\dfrac{1}{n!}$. Puisque $\dfrac{e}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} \times \dfrac{e}{n+1}$, il suffit donc de montrer que $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leqslant \dfrac{e}{n+1}$. Il est clair que le facteur e vient du fait que l'on majore e^t par e sur l'intervalle $[0,1]$. Par contre, on ne peut majorer la fonction $(1-t)^n$ par 1 car cela nous donnera la majoration $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leqslant (1-0) \times 1 \times e = e$, ce qui n'est pas la majoration voulue, donc nous n'allons pas majorer la fonction $(1-t)^n$ et nous calculerons explicitement son intégrale sur l'intervalle $[0,1]$.
Synthèse :
$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,1], \\ 0 &\leqslant (1-t)^n e^t \leqslant (1-t)^n e \Rightarrow \int_0^1 0dt \leqslant \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leqslant \int_0^1 (1-t)^n e dt = e\int_0^1 (1-t)^n dt = e\left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{e}{n+1} \\ &\Rightarrow \quad 0 \leqslant I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leqslant \frac{e}{(n+1) \times n!} = \frac{e}{(n+1)!} \end{aligned}$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$, le théorème d'encadrement appliqué à l'encadrement $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{(n+1)!}$ montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. **Analyse du problème** : On doit exprimer l'intégrale $I_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$ en fonction de l'intégrale $I_{n-1} = \dfrac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} e^t dt$. Autrement dit, on doit transformer la puissance $(1-t)^n$ en une puissance $(1-t)^{n-1}$, ce qui

est possible par une intégration par parties, en intégrant l'exponentielle et en dérivant $t \mapsto (1-t)^n$.

Synthèse : On pose $\left\{ \begin{array}{ll} u = (1-t)^n & u' = n(1-t)'(1-t)^{n-1} = -n(1-t)^{n-1} \\ v' = e^t & v = e^t \end{array} \right.$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt = \frac{1}{n!}\left\{ \left[(1-t)^n e^t\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 -n(1-t)^{n-1}e^t dt \right\} = \frac{1}{n!}\left\{ -1 + n\int_0^1 (1-t)^{n-1}e^t dt \right\} \\ &= -\frac{1}{n!} + \frac{n}{n!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}e^t dt = -\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}e^t dt = -\frac{1}{n!} + I_{n-1} \end{aligned}$$

3. Pour la première égalité, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : I_n = e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Initialisation $n = 0$: $\left. \begin{array}{c} I_0 = \frac{1}{0!}\int_0^1 (1-t)^0 e^t dt = \int_0^1 e^t dt = [e^t]_{t=0}^{t=1} = e-1 \\ e - \sum\limits_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} = e - \frac{1}{0!} = e-1 \end{array} \right\} \Rightarrow I_0 = e - \sum\limits_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que $I_n = e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et montrons que $I_{n+1} = e - \sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$.

En utilisant la relation de récurrence de la question 2, on a

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!} \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} e - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) - \frac{1}{(n+1)!} = e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

Puisque $I_n = e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ (question 1), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

Remarque : On démontre, et nous le ferons en devoir à la maison, que pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

correction de l'exercice 3

1. Monotonie des suites $(I_n)_n$ et (J_n)

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{t^{n+1} - t^n}{1+t^2} dt = \int_0^1 \underbrace{\frac{t^n}{1+t^2}}_{\geqslant 0 \text{ sur } [0,1]} \underbrace{(t-1)}_{\leqslant 0 \text{ sur } [0,1]} dt \leqslant 0 \quad (\text{car } 0 \leqslant 1) \\ J_{n+1} - J_n &= \int_0^1 (t^{n+1} - t^n)\ln(1+t^2) dt = \int_0^1 \underbrace{(t-1)}_{\leqslant 0 \text{ sur } [0,1]} \underbrace{t^n \ln(1+t^2)}_{\geqslant 0 \text{ sur } [0,1]} dt \leqslant 0 \quad (\text{car } 0 \leqslant 1) \end{aligned}$$

donc les suites $(I_n)_n$ et $(J_n)_n$ sont décroissantes.

2. **Analyse du problème** : La majoration de I_n dépend de n donc on ne peut pas majorer le facteur t^n par 1 (sinon, la majoration de I_n serait indépendante de n) donc nous n'allons pas majorer ce facteur et nous calculerons explicitement l'intégrale correspondante. Par contre, nous allons majorer le facteur $\frac{1}{1+x^2}$ par 1, ce qui est évident.

Synthèse :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n \Rightarrow \int_0^1 0 dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leqslant \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement s'applique à l'encadrement précédent donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. **Analyse du problème** : On doit exprimer l'intégrale $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$ en fonction de l'intégrale $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2} dt$. On remarque que la fonction $t \mapsto \ln(1+t^2)$ a disparu et que la fonction $\frac{1}{1+t^2}$ est apparue. Le seul

moyen sensé est de dériver la fonction $t \mapsto \ln(1+t^2)$, dont la dérivée est $\dfrac{2t}{1+t^2}$, ce qui nous incite à procéder par une intégration par parties, en dérivant $t \mapsto \ln(1+t^2)$ et en intégrant $t \mapsto t^n$.

Synthèse : On pose $\begin{cases} u = \ln(1+t^2) & u' = \dfrac{(1+t^2)'}{1+t^2} = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ v' = t^n & v = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(1+t^2)\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{2t}{1+t^2}dt = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2}dt = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1}I_{n+2}$$

4. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+2} = 0$, en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.
   Ensuite, en multipliant par n l'égalité $J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1}J_n$, on obtient
   $$nJ_n = \underbrace{\frac{n\ln 2}{n+1}}_{\to \ln 2} - \underbrace{\frac{2n}{n+1}}_{\to 2}\underbrace{I_{n+2}}_{\to 0} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} nJ_n = \ln 2 - 2\times 0 = \ln 2 \Leftrightarrow nJ_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln 2 \Leftrightarrow J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$$

correction de l'exercice 4

1. **Analyse du problème** : La majoration de I_n dépend de n donc on ne peut pas majorer le facteur x^n par 1 (sinon, la majoration de I_n serait indépendante de n) donc nous n'allons pas majorer ce facteur et nous calculerons explicitement l'intégrale correspondante. Par contre, nous allons majorer le facteur $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ par 1, ce qui est évident.
   Synthèse :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n \Rightarrow \int_0^1 0dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \leqslant \int_0^1 x^n dt = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement s'applique à l'encadrement précédent donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. **Analyse du problème** : Il suffit d'encadrer l'intégrale J_n par deux expressions tendant vers 0. Il est évident que J_n est positive donc il suffit de déterminer une majoration de J_n qui tend vers 0. En particulier, cette majoration doit dépendre de n !! Il suffit simplement de majorer $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ par 1 (ce qui est évident) et de ne pas toucher le facteur x^n puis d'intégrer.
   Synthèse :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^{n+2} \Rightarrow \int_0^1 0dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx \leqslant \int_0^1 x^{n+2}dx$$
   $$\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant J_n \leqslant \left[\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+3} \Leftrightarrow 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+3}$$
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+3} = 0$, le théorème d'encadrement appliqué à l'encadrement précédent montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

3. **Analyse du problème** : On doit exprimer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ en fonction de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$.
   On remarque que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}$ a disparu et que la fonction $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-3/2}$ est apparue. Le seul moyen sensé est de dériver la fonction $x \mapsto (1+x^2)^{-1/2}$, dont la dérivée est $-x(1+x^2)^{-3/2}$, ce qui nous incite à procéder par une intégration par parties, en dérivant $x \mapsto (1+x^2)^{-1/2}$ et en intégrant $t \mapsto x^n$.
   Synthèse : On pose
   $$\begin{cases} u = (1+x^2)^{-1/2} & u' = -\dfrac{1}{2}(1+x^2)'(1+x^2)^{-3/2} = -\dfrac{1}{2}(2x)(1+x^2)^{-3/2} = -x(1+x^2)^{-3/2} = \dfrac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\ v' = x^n & v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx \\ &= \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1}J_n \end{aligned}$$

En multipliant cette égalité par n, on obtient

$$nI_n = \underbrace{\frac{n}{(n+1)\sqrt{2}}}_{\to 1/\sqrt{2}} + \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}\underbrace{J_n}_{\to 0} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \times 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Remarque : on a ainsi montré que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$

correction de l'exercice 5

1. **Analyse du problème** : On doit exprimer l'intégrale $I_{m,n} = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ en fonction de l'intégrale $I_{m-1,n+1} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1}dx$. Autrement dit, on doit augmenter le degré de $(1-x)$ et diminuer celui de x. Il est immédiat qu'une intégration par parties convient, en intégrant $(1-x)^n$ et en dérivant x^m.

   Synthèse : On pose $\begin{cases} u = x^m & u' = mx^{m-1} \\ v' = (1-x)^n & v = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \left[x^m\left(-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 mx^{m-1}\left(-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right)dx \underset{m>0}{=} \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1} \\ &= \frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1} \end{aligned}$$

2. On procède de proche en proche

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1} = \frac{m}{n+1} \times \frac{m-1}{(n+1)+1}I_{m-2,n+2} = \frac{m}{n+1} \times \frac{m-1}{n+2} \times \frac{m-2}{n+3}I_{m-3,n+3} = \cdots \\ &= \frac{m}{n+1} \times \frac{m-1}{n+2} \times \frac{m-2}{n+3} \times \cdots \times \frac{m-(m-1)}{n+(m-1)+1}I_{m-(m-1)-1,n+(m-1)+1} \\ &= \frac{m}{n+1} \times \frac{m-1}{n+2} \times \frac{m-2}{n+3} \times \cdots \times \frac{1}{n+m}I_{0,n+m} = \frac{m!}{(n+1)\cdots(n+m)}I_{0,n+m} = \frac{m!}{\frac{(n+m)!}{n!}}I_{0,n+m} = \frac{m!n!}{(n+m)!}I_{0,n+m} \end{aligned}$$

3. $I_{0,n+m} = \int_0^1 (1-x)^{n+m}dx = \left[-\dfrac{(1-x)^{n+m+1}}{n+m+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \dfrac{1}{n+m+1}$ donc

$$I_{m,n} = \frac{m!n!}{(n+m)!} \times \frac{1}{n+m+1} = \frac{m!n!}{(n+m+1)!}$$

correction de l'exercice 6

1. Ne récurrons surtout pas (on n'a pas inventé le lave-vaisselle pour rien tout de même :-)). Il suffit de se rappeler que $\sum\limits_{k=0}^n q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ lorsque $q \neq 1$ (souvenirs, souvenirs .... de début d'année)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k &= \sum_{k=0}^n (-t)^k \underset{-t\neq 1}{=} \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t} \end{aligned}$$

2. En multipliant l'égalité précédente par t^x puis en intégrant sur le segment $[0,1]$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}\frac{t^x}{1+t} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k+x} + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+x+1}}{1+t} \Rightarrow \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{k+x}dt + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{t^{k+x+1}}{k+x+1}\right]_{t=0}^{t=1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+x+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt = S_n(x) + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt\end{aligned}$$

3. **Analyse du problème** : On doit encadrer l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt$. La positivité étant évidente, il suffit d'obtenir une majoration dépendant de n. C'est immédiat en majorant uniquement $\frac{1}{1+t}$ par 1.
Synthèse :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t\in[0,1], \quad 0 \leqslant \frac{t^{n+x+1}}{1+t} \leqslant t^{n+x+1} \Rightarrow \int_0^1 0dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt \leqslant \int_0^1 t^{n+x+1}dt = \left[\frac{t^{n+x+2}}{n+x+2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+x+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt \leqslant \frac{1}{n+x+2} \leqslant \frac{1}{n+2} \qquad (\text{car } x \geqslant 0 \text{ donc } n+x+2 \geqslant n+2)$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+2} = 0$, le théorème d'encadrement s'applique à l'encadrement précédent donc $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt =$ 0. Or, on sait que $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt - S_n(x) = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt$ et la suite $(-1)^{n+1}$ étant bornée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt - S_n(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$$

Remarque : lorsque $x=0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln|1+t|]_{t=0}^{t=1} = \ln 2$

correction de l'exercice 7

1. **Analyse du problème** : Il suffit d'encadrer l'intégrale I_n par deux expressions tendant vers 0. Il est évident que I_n est positive donc il suffit de déterminer une majoration de I_n qui tend vers 0. En particulier, cette majoration doit dépendre de n !! Il suffit simplement de majorer $\frac{1}{1+x}$ par 1 (ce qui est évident) et de ne pas toucher le facteur x^n puis d'intégrer.
Synthèse :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x\in[0,1], \quad 0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n \Rightarrow \int_0^1 0dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leqslant \int_0^1 x^n dx$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement appliqué à l'encadrement précédent montre que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. **Analyse du problème** : Au premier abord, on se dit qu'il faut exprimer $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$ en fonction de $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$. On est bien tenté par une classique intégration par parties. Soit on intègre $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, on obtient du

$\ln(1+x)$, ce qui ne convient manifestement pas, soit on intègre $x \mapsto x^n$ et on dérive $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$. Je laisse le lecteur s'amuser avec cette méthode et ne pas aboutir.
La force n'ayant pas abouti, on tente la finesse. On se dit que si l'on devait procéder par une intégration par parties, la formule demandée serait $I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$, ce qui n'est pas le cas. Puisque l'énoncé propose $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, nous allons simplifier la somme $I_n + I_{n+1}$
Synthèse :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}$$

Argh, la finesse vient de l'emporter sur la Force !! Petit Padawan, la Force n'était donc avec nous aujourd'hui :-).
Le calcul de I_0 se fait directement et celui de I_1 par la formule de récurrence.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln|1+x|]_{x=0}^{x=1} = \ln 2 \Rightarrow I_1 = -I_0 + \frac{1}{0+1} = -\ln 2 + 1 = 1 - \ln 2$$

3. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : (-1)^n I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$.

Initialisation $n = 1$: $\left.\begin{array}{c} (-1)^1 I_1 = -I_1 = \ln 2 - 1 \\ \ln 2 + \sum_{k=1}^{1} \dfrac{(-1)^k}{k} = \ln 2 + \dfrac{(-1)^1}{1} = \ln 2 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1)^1 I_1 = \ln 2 + \sum_{k=1}^{1} \dfrac{(-1)^k}{k}$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$ vraie, c'est-à-dire, supposons que $(-1)^n I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$ et montrons que $(-1)^{n+1} I_{n+1} = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^k}{k}$. En utilisant la rélation de récurrence $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ et en remarquant que $-(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} = (-1)^n(-1)^2 = (-1)^n$, on obtient

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} I_{n+1} &= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - I_n\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - (-1)^{n+1} I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + (-1)^n I_n \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}_{k=n+1} + \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k} \end{aligned}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

4. A la question 1, on a montré que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et, la suite $(-1)^n$ étant bornée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n I_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$$