correction de l'exercice 1

Pour commencer, on se rappelle que

- les séries $\sum_{k\geqslant 0} x^k$, $\sum_{k\geqslant 0} kx^k$, $\sum_{k\geqslant 0} k(k-1)x^k$, $\sum_{k\geqslant 0} k^2x^k$ convergent ssi $x\in]-1,1[$ et que

$$\forall x \in]-1,+1[,\quad \sum_{k=0}^{+\infty} x^k=\frac{1}{1-x},\quad \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right),\quad \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \underset{\times x}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k=\frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}=\frac{2}{(1-x)^3} \underset{\times x}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^k=\frac{x^2}{(1-x)^3}$$

- la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x et que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\exp(x)$

$\boxed{\text{a)}}$ La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n(n-1)}{5^n}=\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^n$ converge puisque $\frac{1}{5}\in]-1,+1[$ et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3}=\frac{5}{32}$$

$\boxed{\text{b)}}$ La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2}{5^n}=\sum_{n\geqslant 0} n^2\left(\frac{1}{5}\right)^n$ converge puisque $\frac{1}{5}\in]-1,+1[$ et l'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}=\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\left(\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3}+\frac{\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{15}{32}$$

$\boxed{\text{c)}}$ La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{4n^2+5n}{5^n}=4\sum_{n\geqslant 0} n^2\left(\frac{1}{5}\right)^n+5\sum_{n\geqslant 0} n\left(\frac{1}{5}\right)^n$ converge puisque $\frac{1}{5}\in]-1,+1[$ (par combinaison linéaire de deux séries convergentes) et l'on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+5n}{5^n} &= 4\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\left(\frac{1}{5}\right)^n+5\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{5}\right)^n=4\left[\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]+5\times\frac{\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}\\ &= 4\left[\frac{2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3}+\frac{\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}\right]+\frac{25}{16}=\frac{55}{16}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{d)}}$ La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n n}{3^n}=\sum_{n\geqslant 0} n\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ converge puisque $-\frac{1}{3}\in]-1,+1[$ et l'on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}=\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{-\frac{1}{3}}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2}=-\frac{3}{16}$$

$\boxed{\text{e)}}$ La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n n^2}{3^n}=\sum_{n\geqslant 0} n^2\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n\geqslant 0} n\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ converge puisque $-\frac{1}{3}\in]-1,+1[$ (par combinaison linéaire de deux séries convergentes) et l'on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3^n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{3}\right)^n\\ &= \frac{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^3}+\frac{-\frac{1}{3}}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2}=-\frac{3}{32}\end{aligned}$$

f) La série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}=\sum_{n\geqslant 0}n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ est convergente puisque $-\frac{1}{3}\in]-1,+1[$ et l'on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^3}=\frac{3}{32}$$

g) La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1^n}{n!}$ converge (série exponentielle) et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\exp(1)=e$

h) La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{4(-1)^{n+1}}{n!}=-4\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n!}$ converge (série exponentielle) et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n!}=-4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=-4\exp(-1)=-\frac{4}{e}$$

i) La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n2^n}{n!}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{n2^n}{n!}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n}{(n-1)!}\underset{k=n-1}{=}\sum_{k\geqslant 0}\frac{2^{k+1}}{k!}=2\sum_{k\geqslant 0}\frac{2^k}{k!}$ est convergente (série exponentielle) et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n2^n}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n2^n}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}\underset{k=n-1}{=}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^{k+1}}{k!}=2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{k!}=2\exp(2)=2e^2$$

j) La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{3^n}{(n+1)!}\underset{k=n+1}{=}\sum_{k\geqslant 1}\frac{3^{k+1}}{k!}=3\sum_{k\geqslant 1}\frac{3^k}{k!}=3\left[\left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{3^k}{k!}\right)-1\right]$ est convergente (série exponentielle) et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}\underset{k=n+1}{=}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3^{k+1}}{k!}=3\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3^k}{k!}=3\left[\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{3^k}{k!}\right)-1\right]=3\left[\exp(3)-1\right]=3e^3-3$$

correction de l'exercice 2

1. Loi de X : Par définition, $X(\Omega)=\mathbb{N}^\times$ et, en utilisant le système complet d'évènements $\{(Y=1),(Y=2),...\}=\{(Y=j)\}_{j\in\mathbb{N}^\times}$, on a, pour tout $i\in\mathbb{N}^\times$,

$$\begin{aligned}
P\left(X=i\right) &= \sum_{j=1}^{+\infty}P(X=i\cap Y=j)=\sum_{j=1}^{+\infty}p^{i+1}(1-p)^j+(1-p)^{i+1}p^j=p^{i+1}\sum_{j=1}^{+\infty}(1-p)^j+(1-p)^{i+1}\sum_{j=1}^{+\infty}p^j\\
&= p^{i+1}\left[(1-p)+(1-p)^2+\cdots\right]+(1-p)^{i+1}\left[p+p^2+\cdots\right]\\
&= p^{i+1}(1-p)\left[1+(1-p)+\cdots\right]+(1-p)^{i+1}p\left[1+p+\cdots\right]\\
&= p^{i+1}(1-p)\sum_{j=0}^{+\infty}(1-p)^j+(1-p)^{i+1}p\sum_{j=0}^{+\infty}p^j=p^{i+1}(1-p)\times\frac{1}{1-(1-p)}+(1-p)^{i+1}p\times\frac{1}{1-p}\\
&= (1-p)p^i+p(1-p)^i
\end{aligned}$$

De même, $Y(\Omega)=\mathbb{N}^\times$ et, en utilisant le système complet d'évènements $\{(X=1),(X=2),...\}=\{(X=i)\}_{i\in\mathbb{N}^\times}$, on a, pour tout $j\in\mathbb{N}^\times$,

$$\begin{aligned}
P\left(Y=j\right) &= \sum_{i=1}^{+\infty}P(X=i\cap Y=j)=\sum_{i=1}^{+\infty}p^{i+1}(1-p)^j+(1-p)^{i+1}p^j=(1-p)^jp\sum_{i=1}^{+\infty}p^i+p^j(1-p)\sum_{i=1}^{+\infty}(1-p)^i\\
&= (1-p)^jp\left[p+p^2+\cdots\right]+p^j(1-p)\left[(1-p)+(1-p)^2+\cdots\right]\\
&= (1-p)^jp^2\left[1+p+\cdots\right]+p^j(1-p)^2\left[1+(1-p)+\cdots\right]\\
&= (1-p)^jp^2\sum_{i=0}^{+\infty}p^i+p^j(1-p)^2\sum_{i=0}^{+\infty}(1-p)^i=(1-p)^jp^2\times\frac{1}{1-p}+p^j(1-p)^2\times\frac{1}{1-(1-p)}\\
&= (1-p)^{j-1}p^2+p^{j-1}(1-p)^2
\end{aligned}$$

2. X admet une espérance et calcul de $E(X)$: La variable X admet une espérance ssi la série

$$\sum_{i\geqslant 1}iP(X=i)=\sum_{i\geqslant 1}i\left((1-p)p^i+p(1-p)^i\right)=(1-p)\sum_{i\geqslant 1}ip^i+p\sum_{i\geqslant 1}i(1-p)^i=(1-p)\sum_{i\geqslant 0}ip^i+p\sum_{i\geqslant 0}i(1-p)^i$$

converge. Or cette dernière série est une combinaison linéaire de deux séries convergentes (car p et $1-p$ appartiennent à $]0,1[$ donc à $]-1,+1[$), ce qui implique que X admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i\geqslant 1} iP(X=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\left((1-p)p^i + p(1-p)^i\right) = (1-p)\sum_{i=1}^{+\infty} ip^i + p\sum_{i=1}^{+\infty} i(1-p)^i \\ &= (1-p)\times\frac{p}{(1-p)^2} + p\times\frac{1-p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

<u>Y admet une espérance et calcul de $E(Y)$</u> : La variable Y admet une espérance ssi la série

$$\begin{aligned} \sum_{j\geqslant 1} jP\left(Y=j\right) &= \sum_{j\geqslant 1} j\left((1-p)^{j-1}p^2 + p^{j-1}(1-p)^2\right) = \frac{p^2}{1-p}\sum_{j\geqslant 1} j(1-p)^j + \frac{(1-p)^2}{p}\sum_{j\geqslant 1} jp^j \\ &= \frac{p^2}{1-p}\sum_{j\geqslant 0} j(1-p)^j + \frac{(1-p)^2}{p}\sum_{j\geqslant 0} jp^j \end{aligned}$$

converge. Or cette dernière série est une combinaison linéaire de deux séries convergentes (car p et $1-p$ appartiennent à $]0,1[$ donc à $]-1,+1[$), ce qui implique que Y admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^{+\infty} jP(Y=j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\left((1-p)^{j-1}p^2 + p^{j-1}(1-p)^2\right) = \frac{p^2}{1-p}\sum_{j=1}^{+\infty} j(1-p)^j + \frac{(1-p)^2}{p}\sum_{j=1}^{+\infty} jp^j \\ &= \frac{p^2}{1-p}\sum_{j=0}^{+\infty} j(1-p)^j + \frac{(1-p)^2}{p}\sum_{j=0}^{+\infty} jp^j = \frac{p^2}{1-p}\times\frac{1-p}{(1-(1-p))^2} + \frac{(1-p)^2}{p}\times\frac{p}{(1-p)^2} = 1+1=2 \end{aligned}$$

3. <u>Variance de X</u> : La variable $X(X-1)$ admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} i(i-1)P(X=i)$ (théorème du transfert) converge, ce qui est vrai puisque l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \sum_{i\geqslant 1} i(i-1)P\left(X=i\right) &= \sum_{i\geqslant 1} i(i-1)\left[(1-p)p^i + p(1-p)^i\right] = \sum_{i\geqslant 0} i(i-1)\left[(1-p)p^i + p(1-p)^i\right] \\ &= (1-p)\sum_{i\geqslant 0} i(i-1)p^i + p\sum_{i\geqslant 0} i(i-1)(1-p)^i \end{aligned}$$

montre que la série considérée est une combinaison linéaire de deux séries convergentes (car p et $1-p$ appartiennent à $]0,1[$ donc à $]-1,+1[$) et l'on a

$$\begin{aligned} E\left[X(X-1)\right] &= \sum_{i=1}^{+\infty} i(i-1)P(X=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} i(i-1)\left[(1-p)p^i + p(1-p)^i\right] = \sum_{i=0}^{+\infty} i(i-1)\left[(1-p)p^i + p(1-p)^i\right] \\ &= (1-p)\sum_{i=0}^{+\infty} i(i-1)p^i + p\sum_{i=0}^{+\infty} i(i-1)(1-p)^i = (1-p)\frac{2p^2}{(1-p)^3} + p\frac{2(1-p)^2}{(1-(1-p))^3} \\ &= 2\left(\frac{p}{1-p}\right)^2 + 2\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \end{aligned}$$

La variable $X(X-1) = X^2 - X$ admettant une espérance et, compte-tenu que la variable X admet également une espérance, on en déduit que la variable $X^2 = (X^2 - X) + X$ admet une espérance donc X admet une variance (car X et X^2 admettent une espérance) et l'on a

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E(X(X-1)) + E(X) = 2\left(\frac{p}{1-p}\right)^2 + 2\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} \\ V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = 2\left(\frac{p}{1-p}\right)^2 + 2\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} - \left(\frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}\right)^2 \\ &= 2\left(\frac{p}{1-p}\right)^2 + 2\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} - \left[\left(\frac{p}{1-p}\right)^2 + 2 + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2\right] \\ &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} - 2 \end{aligned}$$

Variance de Y : La variable $Y(Y-1)$ admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{j\geqslant 1} j(j-1)P(Y=j)$ (théorème du transfert) converge, ce qui est vrai puisque l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\sum_{j\geqslant 1} j(j-1)P(Y=j) &= \sum_{j\geqslant 1} j(j-1)\left[(1-p)^{j-1}p^2+p^{j-1}(1-p)^2\right]=\sum_{j\geqslant 0} j(j-1)\left[(1-p)^{j-1}p^2+p^{j-1}(1-p)^2\right]\\ &= \frac{p^2}{1-p}\sum_{j\geqslant 0} j(j-1)p^j+\frac{(1-p)^2}{p}\sum_{j\geqslant 0} j(j-1)p^j\end{aligned}$$

montre que la série considérée est une combinaison linéaire de deux séries convergentes (car p et $1-p$ appartiennent à $]0,1[$ donc à $]-1,+1[$) et l'on a

$$\begin{aligned}E[Y(Y-1)] &= \sum_{j=1}^{+\infty} j(j-1)P(Y=j)=\sum_{j=1}^{+\infty} j(j-1)\left[(1-p)^{j-1}p^2+p^{j-1}(1-p)^2\right]\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} j(j-1)\left[(1-p)^{j-1}p^2+p^{j-1}(1-p)^2\right]=\frac{p^2}{1-p}\sum_{j=0}^{+\infty} j(j-1)(1-p)^j+\frac{(1-p)^2}{p}\sum_{j=0}^{+\infty} j(j-1)p^j\\ &= \frac{p^2}{1-p}\times\frac{2(1-p)^2}{(1-(1-p))^3}+\frac{(1-p)^2}{p}\times\frac{2p^2}{(1-p))^3}=2\times\frac{1-p}{p}+2\times\frac{p}{1-p}\end{aligned}$$

La variable $Y(Y-1)=Y^2-Y$ admettant une espérance et, compte-tenu que la variable Y admet également une espérance, on en déduit que la variable $Y^2=(Y^2-Y)+Y$ admet une espérance donc Y admet une variance (car Y et Y^2 admettent une variance) et l'on a

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= E(Y(Y-1))+E(Y)=2\times\frac{1-p}{p}+2\times\frac{p}{1-p}+2=2\left(\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}+1\right)\\ V(X) &= E(X^2)-[E(X)]^2=2\left(\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}+1\right)-4=2\left(\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}-1\right)\end{aligned}$$

4. D'après l'énoncé, on a

$$P(X=1\cap Y=1)=p^2(1-p)+(1-p)^2p=p(1-p)(p+1-p)=p(1-p)$$

et d'après la question 1, on a

$$P(X=1)P(Y=1)=[(1-p)p+p(1-p)]\left[p^2+(1-p)^2\right]=2p(1-p)\left[p^2+(1-p)^2\right]$$

Par conséquent, en tenant compte que p et $1-p$ appartiennent à $]0,1[$ et sont distincts de $\frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}P(X=1\cap Y=1) &= P(X=1)P(Y=1)\Leftrightarrow p(1-p)=2p(1-p)\left[p^2+(1-p)^2\right]\Leftrightarrow 1=2\left[p^2+(1-p)^2\right]\\ &\Leftrightarrow\ 1=2(2p^2-2p+1)\Leftrightarrow 4p^2-4p+1=0\Leftrightarrow p=(2p-1)^2=0\Leftrightarrow p=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ce qui est absurde car $p\neq\frac{1}{2}$ donc les variables X et Y sont dépendantes lorsque $p\neq\frac{1}{2}$.

5. En utilisant l'énoncé et la question 1, on a, pour tous i et j dans $\mathbb{N}^\times$,

$$\begin{aligned}P(X=i)P(Y=j) &= \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^i+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^i\right]\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\right]\\ &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\right]\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}\right]=\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\right]\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}\right]\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^j=\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}\\ P(X=i\text{ et }Y=j) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^j+\left(1-\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^j=\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^j+\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^j\\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}\end{aligned}$$

donc $\forall i,j\in\mathbb{N}^\times,\quad P(X=i)P(Y=j)=P(X=i\text{ et }Y=j)$, ce qui implique que les variables X et Y sont indépendantes lorsque $p=\frac{1}{2}$.

correction de l'exercice 3

1. On répète indéfiniment l'expérience $\mathcal{E}$ " piocher une boule dans l'urne ", les expériences étant mutuellement indépendantes et X représente le rang de réalisation de l'évènement A " obtenir une boule blanche " dont la probabilité est égale à p donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, c'est-à-dire
$$X_1(\Omega) = \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\times} \quad P(X_1 = n) = (1-p)^{n-1}p$$
En particulier, X admet une espérance et une variance et on a
$$\begin{aligned}
E(X_1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}p = p\sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} \\
E(X_1(X_1-1)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-1}p = p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} = p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p^2} \\
E(X_1^2) &= E(X_1(X_1-1)) + E(X_1) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2} = \frac{2-p}{p^2} \\
V(X_1) &= E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

2. Loi de X_2 : Etant donné que l'on ne peut obtenir la 2-ième boule blanche qu'à compter de la seconde pioche, il est immédiat que $X_2(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Le rang d'apparition de la seconde boule blanche dépendant du rang d'apparition de la première boule blanche, c'est-à-dire des évènements $\{(X_1 = 1), (X_1 = 2), ..\} = \{(X_1 = i)\}_{i\in\mathbb{N}^{\times}}$. En utilisant le système complet d'évènements $\{(X_1 = i)\}_{i\in\mathbb{N}^{\times}}$, on a
$$\begin{aligned}
\forall j &\in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \quad P(X_2 = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i \cap X_2 = j) = \sum_{i=1}^{j-1} P(X_1 = i \cap X_2 = j) + \sum_{i=j}^{+\infty} \underbrace{P(X_1 = i \cap X_2 = j)}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} (1-p)^{j-2}p^2 = (1-p)^{j-2}p^2\sum_{i=1}^{j-1} 1 = (j-1)(1-p)^{j-2}p^2
\end{aligned}$$
Justification des calculs de probabilités : *Etant donné que la seconde boule blanche apparait nécessairement après la première boule blanche (!!), l'évènement* $(X_1 = i \cap X_2 = j)$ *est impossible lorsque* $i \geqslant j$. *Lorsque* $i < j \Leftrightarrow i \leqslant j-1$, *l'évènement* $(X_1 = i \cap X_2 = j)$ *est identique à l'évènement* $\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{i-1}} \cap B_i \cap \overline{B_{i+1}} \cap \cdots \overline{B_{j-1}} \cap B_j$, *où* B_k *désigne l'évènement " obtenir une boule blanche à la k-ième pioche ". Etant donné que ces évènements sont mutuellements indépendants, que deux de ces évènements ont pour probabilité p et les* $j-2$ *autres ont la probabilité* $(1-p)$, *on en déduit que*
$$\begin{aligned}
P(X_1 &= i \cap X_2 = j) = P(\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{i-1}} \cap B_i \cap \overline{B_{i+1}} \cap \cdots \overline{B_{j-1}} \cap B_j) \\
&= P(\overline{B_1}) \cdots P(\overline{B_{i-1}})P(B_i)P(\overline{B_{i+1}}) \cdots P(\overline{B_{j-1}})P(B_j) = (1-p)^{j-2}p^2
\end{aligned}$$
Espérance de X_2 : La variable X_2 admet une espérance ssi la série
$$\sum_{n\geqslant 2} jP(X_2 = j) = \sum_{j\geqslant 2} j(j-1)(1-p)^{j-2}p^2 = p^2\sum_{j\geqslant 2} j(j-1)(1-p)^{j-2}$$
converge, ce qui est le cas car $1-p \in]0,1[$ donc à $]-1,1[$ et l'on a
$$E(X_2) = \sum_{j=2}^{+\infty} j(j-1)(1-p)^{j-2}p^2 = p^2\sum_{j=2}^{+\infty} j(j-1)(1-p)^{j-2} = p^2\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p}$$

3. (a) La variable Y_r représente le nombre de pioches nécessaires entre l'obtention de la r-ième boule blanche et la $(r+1)$-ième boule blanche. Si l'on considère comme lancement " 0 ", le lancer qui a fourni la r-ième boule blanche, la variable Y_r représente le nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une boule blanche donc Y_r suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, ce qui implique les identités suivantes
$$Y_r(\Omega) = \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^{\times}, \quad P(Y_r = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad E(Y_r) = \frac{1}{p}$$
   (b) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: " X_r admet une espérance ".
   Initialisation $r = 1$: $(\mathcal{P}_1)$ est vraie d'après la question 1.
   Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_r)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{r+1})$, c'est-à-dire supposons que X_r admet une espérance et montrons que X_{r+1} admet une espérance. D'après la question 3.a) la variable $Y_r = X_{r+1} - X_r$ admet une espérance et, puisque l'hypothèse $(\mathcal{P}_r)$ est supposée vraie, la variable X_r admet une espérance donc la variable $X_r = (X_{r+1} - X_r) + X_r$ admet une espérance, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{r+1})$ et achève la récurrence.

(c) D'après la question 3.a), on a

$$E(Y_r) = \frac{1}{p} \Leftrightarrow E(X_{r+1} - X_r) = \frac{1}{p} \Leftrightarrow E(X_{r+1}) - E(X_r) = \frac{1}{p} \Leftrightarrow E(X_{r+1}) = E(X_r) + \frac{1}{p}$$

ce qui montre que la suite $(E(X_r))_{r\in\mathbb{N}^\times}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{p}$ donc

$$\forall r \in \mathbb{N}^\times, \quad E(X_r) = (r-1) \times \frac{1}{p} + E(X_1) = (r-1) \times \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{r}{p}$$

4. (a) Pour obtenir la r-ième boule blanche, il est indispensable d'effectuer au moins r pioches. Il est dès lors évident que

$$X_r(\Omega) = \{r, r+1, r+2, ...\} = \{k, \quad k \in \mathbb{N} \text{ et } k \geqslant r\}$$

(b) Il est immédiat que $(X_r = k) = A_k \cap B_k$ lorsque $r \leqslant k$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ et } k \geqslant r, \quad P(X_r = k) = P(A_k \cap B_k) = P(A_k)P_{A_k}(B_k) = \left[\binom{r-1}{k-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}\right][p] = \binom{r-1}{k-1}p^r(1-p)^{k-r}$$

Justification de calcul de probabilités :
$P(A_k)$: On souhaite obtenir $r-1$ boules blanches en $k-1$ pioches (donc on obtient $(k-1)-(r-1) = k-r$ boules non blanches). Les pioches s'effectuant dans des conditions absolument identiques et indépendantes, on se trouve dans le cadre du schéma binômial, ce qui nous donne $P(A_k) = \binom{r-1}{k-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}$
$P_{A_k}(B_k)$: L'évènement A_k est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_k. Autrement dit, on a effectué $k-1$ pioches dont $r-1$ ont fourni des boules blanches et on souhaite que la k-ième pioche fournit une boule blanche. Les pioches étant mutuellement indépendantes, cela revient à calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche en une pioche donc $P_{A_k}(B_k) = p$.

Remarque : *En combinant la loi de X_r obtenue dans cette question avec la question 4.a) et en utilisant l'égalité classique $\binom{r}{k} = \frac{k}{r}\binom{r-1}{k-1}$, on en déduit que la série*

$$\sum_{k\geqslant r} kP(X_r = k) = \sum_{k\geqslant r} k\binom{r-1}{k-1}p^r(1-p)^{k-r} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^r \sum_{k\geqslant r} k\binom{r-1}{k-1}(1-p)^k = r\left(\frac{p}{1-p}\right)^r \sum_{k\geqslant r}\binom{r}{k}(1-p)^k$$

converge, donc pour tout $p \in]0,1[$, la série $\sum_{k\geqslant r}\binom{r}{k}(1-p)^k$ est convergente, ce qui n'est nullement triviale du point de vue de l'analyse, et l'on dispose en outre de l'identité remarquable

$$\begin{aligned} E(X_r) &= \frac{r}{p} \Leftrightarrow \sum_{k=r}^{+\infty} k\binom{r-1}{k-1}p^r(1-p)^{k-r} = \frac{r}{p} \Leftrightarrow \left(\frac{p}{1-p}\right)^r \sum_{k=r}^{+\infty} k\binom{r-1}{k-1}(1-p)^k = \frac{r}{p} \\ &\Leftrightarrow r\left(\frac{p}{1-p}\right)^r \sum_{k=r}^{+\infty}\binom{r}{k}(1-p)^k = \frac{r}{p} \Leftrightarrow \sum_{k=r}^{+\infty}\binom{r}{k}(1-p)^k = \frac{(1-p)^k}{p^{r+1}} \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $x = 1-p \Leftrightarrow p = 1-x$, on en déduit que $\forall x \in]0,1[$, la série $\sum_{k\geqslant r}\binom{r}{k}x^k$ est convergente et l'on a $\sum_{k=r}^{+\infty}\binom{r}{k}x^k = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$, ce qui est une égalité classique souvent admise ou redemontrée dans d'assez nombreux sujets de concours.

correction de l'exercice 4

1. L'évènement $(N = n)$ est réalisé et l'on souhaite la réalisation de l'évènement $(X = k)$, autrement dit, n voitures arrivent au péage en 1 heure et on souhaite que k voitures se présentent au guichet n° 1. On réalise donc n expériences identiques à $\mathcal{E}$ " la voiture se présente au péage ", mutuellement indépendantes et on souhaite k réalisations de l'évènement A " la voiture se présente au guichet n° 1 ", dont la probabilité est égale à $\frac{1}{m}$ (chaque péage étant choisi avec la même probabilité). Par conséquent, on se trouve dans le cadre du schéma binômial donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P_{(N=n)}(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k}$$

2. Le nombre de voitures se présentant au guichet n° 1 dépend évidemment du nombre de voitures présentes au péage, c'est-à-dire des évènements $\{(N=0),(N=1),...\}=\{(N=n),\quad n\in\mathbb{N}\}$. En utilisant le système complet d'évènements $(N=n)_{n\in\mathbb{N}}$, la formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n\cap X=k) = \sum_{n=0}^{k-1}\underbrace{P(N=n\cap X=k)}_{=0} + \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n\cap X=k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n\cap X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n)P_{(N=n)}(X=k) \end{aligned}$$

Justification : On ne peut avoir plus de voitures au guichet n° 1 que de voitures présentes au péage donc l'évènement $(N=n\cap X=k)$ est impossible lorsque $k>n\Leftrightarrow n<k$.

3. Puisque N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, c'est-à-dire

$$N(\Omega)=\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\quad P(N=n)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!},$$

les questions 1 et 2 nous donne les égalités suivantes

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{m}\right)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda}\left(\frac{1}{m}\right)^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-k)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k} \underset{j=n-k}{=} \frac{e^{-\lambda}\left(\frac{1}{m}\right)^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{j+k}}{j!}\left(1-\frac{1}{m}\right)^j \\ &= \frac{e^{-\lambda}\left(\frac{1}{m}\right)^k\lambda^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!}\left(1-\frac{1}{m}\right)^j = \frac{e^{-\lambda}\left(\frac{1}{m}\right)^k\lambda^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}\left(\lambda\left(1-\frac{1}{m}\right)\right)^j \end{aligned}$$

4. En utilisant la question précédente, on constate que la somme correspond à la somme de la série exponentielle donc

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\left(\frac{1}{m}\right)^k\lambda^k}{k!}\exp\left(\lambda\left(1-\frac{1}{m}\right)\right)=\exp\left(-\frac{\lambda}{m}\right)\frac{\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k}{k!}$$

On en déduit immédiat que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{m}\right)$

5. D'après le cours sur la loi de Poisson , on a $E(X)=V(X)=\frac{\lambda}{m}$.

correction de l'exercice 5

1. L'évènement $(N=n)$ est réalisé et l'on souhaite la réalisation de l'évènement $(X=k)$, autrement dit, n colis sont expédiés et souhaite que k colis soient détériorés. On réalise donc n expériences identiques à $\mathcal{E}$ " expédier le colis ", mutuellement indépendantes et on souhaite k réalisations de l'évènement A " le colis est détérioré ", dont la probabilité est égale à t. Par conséquent, on se trouve dans le cadre du schéma binômial donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall k\in[\![0,n]\!],\quad P_{(N=n)}(X=k)=\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$$

2. Le nombre de colis détériorés dépend évidemment du nombre de colis expédiés, c'est-à-dire des évènements $\{(N=0),(N=1),..$ $\{(N=n),\quad n\in\mathbb{N}\}$. En utilisant le système complet d'évènements $(N=n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la formule des probabilités totales et en tenant compte que l'évènement $(N=n\cap X=k)$ est impossible lorsque $n<k$ (on ne peut avoir strictement

plus de colis détériorés que de colis expédiés), on en déduit les différentes égalités suivantes

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n\cap X=k) = \sum_{n=0}^{k-1} \underbrace{P(N=n\cap X=k)}_{=0} + \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n\cap X=k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n\cap X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n)P_{(N=n)}(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}t^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}(1-t)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}t^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-k)!}(1-t)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda}t^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{j+k}}{j!}(1-t)^j \qquad (j=n-k) \\
&= \frac{e^{-\lambda}t^k\lambda^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!}(1-t)^j = \frac{e^{-\lambda}t^k\lambda^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}(\lambda(1-t))^j \\
&= \frac{e^{-\lambda}t^k\lambda^k}{k!}\exp(\lambda(1-t)) = \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad \text{(série exponentielle)}
\end{aligned}$$

donc X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.

3. Les calculs sont absolument identiques (et laissé au lecteur) en remplaçant X par Y, t par $1-t$ (probabilité qu'un colis ne soit pas détérioréà, on obtient au final

$$Y(\Omega)=\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall q\in\mathbb{N}, \quad P(Y=q)=\exp(-\lambda(1-t))\frac{(\lambda(1-t))^q}{q!}$$

4. On se dit que le nombre de colis détériorés dépend du nombre de colis non détériorés et réciproquement donc on pense que les variables X et Y sont dépendantes ....

5. D'une part, les questions 2 et 3 nous donne

$$\forall k,q\in\mathbb{N}, \quad P(X=k)P(X=q)=\exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp(-\lambda(1-t))\frac{(\lambda(1-t))^q}{q!}=e^{-\lambda}\lambda^{k+q}\frac{t^k(1-t)^q}{k!q!}$$

Ensuite, pour calculer la probabilité $P((X=k)\cap(Y=q))$, nous devons considérer le système complet d'évènements $(N=n)_{n\in\mathbb{N}}$ (le nombre de colis détériorés et non détériorés dépend du nombre de colis expédiés) donc

$$P((X=k)\cap(Y=q))=\sum_{n=0}^{+\infty}P[(X=k)\cap(Y=q)\cap(N=n)]$$

Or $N=X+Y$ donc lorsque $n\neq k+q$, l'évènement $(X=k)\cap(Y=q)\cap(N=n)$ est clairement impossible donc

$$P((X=k)\cap(Y=q))=P[(X=k)\cap(Y=q)\cap(N=k+q)]=P[(X=k)\cap(N=k+q)]$$

En effet, la réalisation de l'évènement $(X=k)\cap(Y=q)\cap(N=k+q)$ implique celle de l'évènement $(X=k)\cap(N=k+q)$. Réciproquement, si l'évènement $(X=k)\cap(N=k+q)$ est réalisé alors, étant donné que $N=X+Y$ par définition, on a nécessairement $Y=(k+q)-k=q$ donc l'évènement $(X=k)\cap(Y=q)\cap(N=k+q)$ est réalisé.
Pour finir, en utilisant les questions 1 et 2, on obtient

$$\begin{aligned}
P((X &= k)\cap(Y=q)) = P(N=k+q)P_{(N=k+q)}(X=k) = \left[e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+q}}{(k+q)!}\right]\left[\binom{k+q}{k}t^k(1-t)^q\right] \\
&= e^{-\lambda}\lambda^{k+q}t^k(1-t)^q\times\frac{1}{(k+q)!}\times\frac{(k+q)!}{k!q!}=e^{-\lambda}\lambda^{k+q}\frac{t^k(1-t)^q}{k!q!}
\end{aligned}$$

ce qui entraine que

$$\forall k,q\in\mathbb{N}, \quad P((X=k)\cap(Y=q))=P(X=k)P(X=q)$$

donc les variables X et Y sont indépendantes !!!
En fait, la connaissance du nombre de colis détériorés ne peut déterminer celui du nombre de colis non détériorés car le nombre de colis expédiés n'est pas défini donc celui du nombre non détériorés également. Réciproquement la connaissance du nombre de colis non détériorés ne peut déterminer le nombre de colis détériorés.