correction de l'exercice 1

1. La fonction f est le quotient de deux fonctions de classe C^1 sur $[-1,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[-1,1]$ (il s'agit d'un trinôme dont le discriminant est strictement négatif) donc f est C^1 sur $[-1,1]$. Pour déterminer les variations de f, nous allons déterminer le signe de la dérivée de f
$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2+x+1)-(x)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}.$$
Il est alors immédiat que la dérivée de f est strictement positive sur $[-1,1]$ sauf aux deux points $x=-1$ et $x=1$, la fonction f étant C^1 sur $[-1,1]$, cela implique que la fonction f est strictement croissante sur $[-1,1]$. Cette fonction étant en outre continue sur $[-1,1]$ (car elle y est de classe C^1), on en déduit qu'elle réalise une bijection de $[-1,1]$ sur $f([-1,1]) = [f(-1), f(1)] = \left[-1, \frac{1}{3}\right]$

2. La fonction réciproque g est définie sur $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ (et elle réalise une bijection de $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ sur $[-1,1]$) et elle est strictement croissante sur $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$.

3. Pour bien distinguer un élément y_0 de l'intervalle image $f([-1,1]) = \left[-1, \frac{1}{3}\right]$ de son antécédent x_0, j'encadre systématiquement l'antécédent (afin que le lecteur ne fasse pas de confusion lorsque l'élément y_0 est égal à son antécédent)
<u>En 0</u> : On recherche pour commencer l'antécédent de 0 par f appartenant à l'intervalle $[-1,1]$
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
donc l'antécédent de 0 par f appartenant à $[-1,1]$ est $\boxed{0}$, ce qui montre que $g(0) = f^{-1}(0) = \boxed{0}$ et
$$f'(f^{-1}(0)) = f'(\boxed{0}) = 1 \neq 0.$$
On en déduit que g est dérivable en 0 et sa dérivée est donnée par
$$g'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(\boxed{0})} = \frac{1}{1} = 1$$
<u>En $\frac{1}{3}$</u> : On recherche pour commencer l'antécédent de $\frac{1}{3}$ par f appartenant à l'intervalle $[-1,1]$
$$f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = x^2+x+1 \Leftrightarrow 0 = x^2-2x+1 \Leftrightarrow 0 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x = 1$$
donc l'antécédent de $\frac{1}{3}$ par f appartenant à $[-1,1]$ est $\boxed{1}$, ce qui montre que $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{1}$ et
$$f'(f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)) = f'(\boxed{1}) = 0.$$
On en déduit que g n'est pas dérivable en 0 et la courbe représentative de g au point d'abscisse $\frac{1}{3}$ admet une tangente verticale.
<u>En $-\frac{2}{3}$</u> : On recherche pour commencer l'antécédent de $-\frac{2}{3}$ par f appartenant à l'intervalle $[-1,1]$
$$f(x) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+x+1} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow -3x = 2(x^2+x+1) \Leftrightarrow 0 = 2x^2+5x+2 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}$$
donc l'antécédent de $-\frac{2}{3}$ par f appartenant à $[-1,1]$ est $\boxed{-\frac{1}{2}}$, ce qui montre que $f^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$ et
$$f'(f^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)) = f'\left(\boxed{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{4}{3} \neq 0.$$
On en déduit que g est dérivable en $-\frac{2}{3}$ et sa dérivée est donnée par
$$g'(-\frac{2}{3}) = \frac{1}{f'(f^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right))} = \frac{1}{f'\left(\boxed{-\frac{1}{2}}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

En $\dfrac{3}{13}$: On recherche pour commencer l'antécédent de $\dfrac{3}{13}$ par f appartenant à l'intervalle $[-1,1]$

$$f(x)=\frac{3}{13}\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+x+1}=\frac{3}{13}\Leftrightarrow 13x=3(x^2+x+1)\Leftrightarrow 0=3x^2-10x+3\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{3},3\right\}$$

donc l'antécédent de $\dfrac{3}{13}$ par f appartenant à $[-1,1]$ est $\boxed{\dfrac{1}{3}}$, ce qui montre que $f^{-1}\left(\dfrac{3}{13}\right)=\dfrac{1}{3}$ et

$$f'(f^{-1}\left(\frac{3}{13}\right))=f'(\boxed{\frac{1}{3}})=\frac{72}{169}\neq 0.$$

On en déduit que g est dérivable en $\dfrac{3}{13}$ et sa dérivée est donnée par

$$g'(\frac{3}{13})=\frac{1}{f'(f^{-1}\left(\frac{3}{13}\right))}=\frac{1}{f'(\boxed{\frac{1}{3}})}=\frac{1}{\frac{72}{169}}=\frac{169}{72}$$

En -1 : On recherche pour commencer l'antécédent de -1 par f appartenant à l'intervalle $[-1,1]$

$$f(x)=-1\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+x+1}=-1\Leftrightarrow -x=x^2+x+1\Leftrightarrow 0=x^2+2x+1\Leftrightarrow 0=(x+1)^2\Leftrightarrow x=-1$$

donc l'antécédent de -1 par f appartenant à $[-1,1]$ est $\boxed{-1}$, ce qui montre que $f^{-1}(-1)=\boxed{-1}$ et

$$f'(f^{-1}(-1))=f'(\boxed{-1})=0.$$

On en déduit que g n'est pas dérivable en -1 et la courbe représentative de g au point d'abscisse -1 admet une tangente verticale.

4. On commence par déterminer les points x de $[-1,1]$ où la dérivée de f s'annule

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x\in\{-1,1\}$$

Par conséquent, $\forall x\in]-1,1[,\quad f'(x)\neq 0$ donc la réciproque g de f est dérivable sur $f(]-1,1[)=\left]-1,\dfrac{1}{3}\right[$ et elle n'est pas dérivable en $f(-1)=-1$ et $f(1)=\dfrac{1}{3}$.

5. Tangentes horizontales de $\mathcal{C}_f$: D'après les calculs précédents, $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-1,1\}$ donc la courbe représentative de f possédant une tangente horizontale aux points d'abscisse $x=-1$ et $x=1$.
Le graphe est page 10

correction de l'exercice 2

1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et sa dérivée est donnée par

$$f'(x)=2x-6=2(x-3)$$

Il est immédiat que sa dérivée est strictement positive sur l'intervalle $[3,+\infty[$ sauf au point $x=3$ et, comme f est C^1 sur $[3,+\infty[$, on en déduit que f est strictement croissante sur $[3,+\infty[$. En outre, la fonction f est continue sur $[3,+\infty[$ (car elle y est de classe C^1), on est en droit d'affirmer que f réalise une bijection de $[3,+\infty[$ sur $f([3,+\infty[)=[f(3),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)[=[-1,+\infty[$.

2. La réciproque g est donc définie sur $[-1,+\infty[$.
Pour la dérivabilité de g, on détermine les points x de $[3,+\infty[$ où la dérivée de f s'annule

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2(x-3)=0\Leftrightarrow x=3$$

Par conséquent, $\forall x\in]3,+\infty[,\quad f'(x)\neq 0$ donc la réciproque g de f est dérivable sur $f(]3,+\infty[)=]-1,+\infty[$ et elle n'est pas dérivable en $f(3)=-1$.
$g'(0)$: On recherche pour commencer l'antécédent de 0 par f appartenant à l'intervalle $[3,+\infty[$

$$f(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x+8=0\Leftrightarrow x\in\{2,4\}$$

donc l'antécédent de 0 par f appartenant à $[3,+\infty[$ est $\boxed{4}$, ce qui montre que $f^{-1}(0)=\boxed{4}$ et

$$f'(f^{-1}(0)) = f'(\boxed{4}) = 2 \neq 0.$$

On en déduit que g est dérivable en 0 et sa dérivée est donnée par

$$g'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(\boxed{4})} = \frac{1}{2}$$

$\underline{g'(3)}$: On recherche pour commencer l'antécédent de 3 par f appartenant à l'intervalle $[3,+\infty[$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1,5\}$$

donc l'antécédent de 3 par f appartenant à $[3,+\infty[$ est $\boxed{5}$, ce qui montre que $f^{-1}(3)=\boxed{5}$ et

$$f'(f^{-1}(3)) = f'(\boxed{5}) = 4 \neq 0.$$

On en déduit que g est dérivable en 3 et sa dérivée est donnée par

$$g'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(\boxed{5})} = \frac{1}{4}$$

$\underline{g'(8)}$: On recherche pour commencer l'antécédent de 8 par f appartenant à l'intervalle $[3,+\infty[$

$$f(x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0,6\}$$

donc l'antécédent de 8 par f appartenant à $[3,+\infty[$ est $\boxed{6}$, ce qui montre que $f^{-1}(8)=\boxed{6}$ et

$$f'(f^{-1}(8)) = f'(\boxed{6}) = 6 \neq 0.$$

On en déduit que g est dérivable en 8 et sa dérivée est donnée par

$$g'(8) = \frac{1}{f'(f^{-1}(8))} = \frac{1}{f'(\boxed{6})} = \frac{1}{6}$$

3. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = 2x - 6 = 2(x-3)$$

Il est immédiat que sa dérivée est strictement négative sur l'intervalle $]-\infty,3]$ sauf au point $x=3$ et, comme f est C^1 sur $]-\infty,3]$, on en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty,3]$. En outre, la fonction f est continue sur $[3,+\infty[$ (car elle y est de classe C^1), on est en droit d'affirmer que f réalise une bijection de $]-\infty,3]$ sur $f(]-\infty,3]) = [f(3), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[= [-1,+\infty[$.

4. La réciproque h est donc définie sur $[-1,+\infty[$.
Pour la dérivabilité de h, on détermine les points x de $]-\infty,3]$ où la dérivée de f s'annule

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Par conséquent, $\forall x \in]-\infty,-3[,\quad f'(x) \neq 0$ donc la réciproque h de f est dérivable sur $f(]-\infty,3[) =]-1,+\infty[$ et elle n'est pas dérivable en $f(3) = -1$.
$\underline{h'(0)}$: On recherche pour commencer l'antécédent de 0 par f appartenant à l'intervalle $]-\infty,3]$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x \in \{2,4\}$$

donc l'antécédent de 0 par f appartenant à $]-\infty,3]$ est $\boxed{2}$, ce qui montre que $f^{-1}(0)=\boxed{2}$ et

$$f'(f^{-1}(0)) = f'(\boxed{2}) = -2 \neq 0.$$

On en déduit que h est dérivable en 0 et sa dérivée est donnée par

$$h'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(\boxed{2})} = -\frac{1}{2}$$

$\underline{h'(3)}$: On recherche pour commencer l'antécédent de 3 par f appartenant à l'intervalle $]-\infty, 3]$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 5\}$$

donc l'antécédent de 3 par f appartenant à $]-\infty, 3]$ est $\boxed{1}$, ce qui montre que $f^{-1}(3) = \boxed{1}$ et

$$f'(f^{-1}(3)) = f'(\boxed{1}) = -4 \neq 0.$$

On en déduit que h est dérivable en 3 et sa dérivée est donnée par

$$h'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(\boxed{1})} = -\frac{1}{4}$$

$\underline{h'(8)}$: On recherche pour commencer l'antécédent de 8 par f appartenant à l'intervalle $]-\infty, 3]$

$$f(x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 6\}$$

donc l'antécédent de 8 par f appartenant à $[3, +\infty[$ est $\boxed{0}$, ce qui montre que $f^{-1}(8) = \boxed{0}$ et

$$f'(f^{-1}(8)) = f'(\boxed{0}) = -6 \neq 0.$$

On en déduit que h est dérivable en 8 et sa dérivée est donnée par

$$h'(8) = \frac{1}{f'(f^{-1}(8))} = \frac{1}{f'(\boxed{-6})} = -\frac{1}{6}$$

5. Tangentes horizontales de $\mathcal{C}_f$: D'après les calculs précédents, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ donc la courbe représentative de f présente une tangente horizontale au point d'abscisse $x = 3$.
Convexité et points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$: Pour commencer, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et sa dérivée seconde de f est donnée par $f''(x) = 2 \neq 0$ donc la courbe représentative de f ne présente pas de points d'inflexion et la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
Le graphe est page 11

correction de l'exercice 3

1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 30x^2(x^2 - 2x + 1) = 30x^2(x-1)^2$$

Il est immédiat que sa dérivée est strictement positive sur l'intervalle $\mathbb{R}$ sauf aux points $x = 0$ et $x = 1$ et, comme f est C^1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En outre, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car elle y est de classe C^1), on est en droit d'affirmer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

2. La fonction réciproque g est définie sur $\mathbb{R}$ (et elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$) et elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Pour la dérivabilité de g, on détermine les points x de $\mathbb{R}$ où la dérivée de f s'annule

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 30x^2(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$$

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}, \quad f'(x) \neq 0$ donc la réciproque g de f est dérivable sur $f(\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}) = f(\mathbb{R})\backslash\{f(0), f(1)\} = \mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$. On en déduit que g n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier mais elle est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$ et sa courbe représentative présente une tangente verticale aux points d'abscisse 0 et 1.

4. Tangentes horizontales de $\mathcal{C}_f$: D'après les calculs précédents, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$ donc la courbe représentative de f présente une tangente horizontale aux points d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$
Convexité et points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$: Pour commencer, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme)

$$f''(x) = \left[30x^2(x-1)^2\right]' = 30[2x(x-1)^2 + x^2(2)(x-1)] = 60x(x-1)[(x-1) + x] = 60x(x-1)(2x-1)$$

On en déduit le tableau de signe de f''

x	$-\infty$		0		$1/2$		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1/2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent, la fonction f possède trois points d'inflexion (la dérivée seconde s'annule en ces points et change de signe) qui sont $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$. En outre, elle est convexe sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$ et concave sur $]-\infty,0]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]$
Les équations des tangentes en ces points d'inflexion sont

$$(x=0):y=1 \qquad (x=\frac{1}{2}):y=\frac{3}{2}+\frac{15}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad (x=1):y=2$$

(je laisse le soin au lecteur de vérifier ces calculs)
Le graphe est page 12

correction de l'exercice 4

1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (comme quotient de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) et sa dérivée est donnée par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\frac{(x^3)'(1+x^2)-x^3(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\frac{3x^2(1+x^2)-2x^4}{(1+x^2)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}$$

Cette dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf en $x=0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En outre, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car elle y est de classe C^1) donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$f(\mathbb{R})=]\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$$

Par définition, sa réciproque est définie sur $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

2. Le calcul mené à question 1 montre que la dérivée de f s'annule uniquement en $x=0$ donc la réciproque f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{f(0)\}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et sa représentation graphique admet une tangente verticale au point d'abscisse $f(0)=0$.

3. Tangente à $\mathcal{C}_f$: Puisque $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{10}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{25}$, on en déduit que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est

$$y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{25}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{10}$$

Tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$: Il faut évaluer $f^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)$ et $(f^{-1})'\left(\frac{1}{10}\right)$. Puisque $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{10}$, on en déduit que $\boxed{\frac{1}{2}}$ est l'antécédent de $\frac{1}{10}$ par f (par définition des antécédents combiné au fait que f soit bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$) donc $f^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{2}$, ce qui implique que

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{f'(f^{-1}\left(\frac{1}{10}\right))}=\frac{1}{f'\left(\boxed{\frac{1}{2}}\right)}=\frac{25}{13}$$

et l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point d'abscisse $\frac{1}{10}$ est donnée par

$$y=(f^{-1})'\left(\frac{1}{10}\right)\left(x-\frac{1}{10}\right)+f^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{25}{13}\left(x-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{2}=\frac{25}{13}x+\frac{4}{13}$$

4. Tangente horizontale à $\mathcal{C}_f$: D'après les calculs précédents, l'équation $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ donc la courbe représentative de f présente une tangente horizontale au point d'abscisse $x=0$.
Convexité et points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$: Pour commencer, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (raisonnement identique au cas C^1) et l'on a

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2}\right]'=\frac{\left[x^4+3x^2\right]'(1+x^2)^2-\left(x^4+3x^2\right)\left[(1+x^2)^2\right]'}{(1+x^2)^4}=\frac{\left[4x^3+6x\right](1+x^2)^2-\left(x^4+3x^2\right)\left[4x(1+x^2)\right]}{(1+x^2)^4}\\ &= x(1+x^2)\frac{\left[4x^2+6\right](1+x^2)-4\left(x^4+3x^2\right)}{(1+x^2)^4}=x\frac{-2x^2+6}{(1+x^2)^3}=\frac{-2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}\end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe de f''

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Par conséquent, la fonction f possède trois points d'inflexion (la dérivée seconde s'annule en ces points et change de signe) qui sont $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$. En outre, elle est convexe sur $]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}]$ et concave sur $[-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$
Les équations des tangentes en ces points d'inflexion sont

$$(x=-\sqrt{3}) : y = -\frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{9}{8}\left(x+\sqrt{3}\right) \qquad (x=0) : y = 0 \qquad (x=\sqrt{3}) : y = \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{9}{8}\left(x-\sqrt{3}\right)$$

(je laisse le soin au lecteur de vérifier ces calculs)
Le graphe est page 13

correction de l'exercice 5

1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (comme quotient de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{(e^x-1)'(e^x+1) - (e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

2. D'après la question précédente, on peut affirmer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et ses limites aux bornes sont données par

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{-1}{1} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Tangente horizontale à $\mathcal{C}_f$: D'après les calculs précédents, la dérivée de f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc la courbe représentative de f ne possède pas de tangente horizontale.
Convexité et points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$: Pour commencer, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (raisonnement identique au cas C^1) et l'on a

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}\right]' = 2\frac{[e^x]'(e^x+1)^2 - (e^x)\left[(e^x+1)^2\right]'}{(e^x+1)^4} = 2\frac{e^x(e^x+1)^2 - (e^x)\,2e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^4} \\ &= 2e^x(e^x+1)\frac{(e^x+1)-2e^x}{(e^x+1)^3} = 2e^x(e^x+1)\frac{1-e^x}{(e^x+1)^3} \end{aligned}$$

Il est immédiat que le signe de $f''(x)$ est celui de $1-e^x$, ce qui nous donne immédiatement le tableau de signe de f''

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1-e^x$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Par conséquent, la fonction f possède un point d'inflexion (la dérivée seconde s'annule en ce points et change de signe) qui est $x=0$. En outre, elle est convexe sur $]-\infty, 0]$ et concave sur $[0, +\infty[$
L'équation de la tangente au point d'inflexion est $y = \dfrac{1}{2}x$ (je laisse le soin au lecteur de vérifier ces calculs)

3. D'après la question 1, la dérivée de f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En outre, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car elle y est de classe C^1) donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-1, +1[$$

Le graphe est page 14

4. La dérivée de f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (question 1) donc sa réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.

5. Nous savons que f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$. Par conséquent, il suffit essentiellement de déterminer les différents antécédents

<u>En 0</u> : On recherche pour commencer l'antécédent de 0 par f appartenant à l'intervalle $\mathbb{R}$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1}=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$$

donc l'antécédent de 0 par f appartenant à $\mathbb{R}$ est $\boxed{0}$, ce qui montre que $f^{-1}(0)=\boxed{0}$ et

$$f'(f^{-1}(0))=f'(\boxed{0})=\frac{1}{2}\neq 0 \Rightarrow (f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\frac{1}{f'(\boxed{0})}=2$$

<u>En $\frac{1}{2}$</u> : On recherche pour commencer l'antécédent de $\frac{1}{3}$ par f appartenant à l'intervalle $\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(e^x-1)=e^x+1 \Leftrightarrow e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln 3$$

donc l'antécédent de $\frac{1}{2}$ par f appartenant à $\mathbb{R}$ est $\boxed{\ln 3}$, ce qui montre que $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\boxed{\ln 3}$ et

$$f'(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right))=f'(\boxed{\ln 3})=\frac{2e^{\ln 3}}{(e^{\ln 3}+1)^2}=\frac{2\times 3}{(3+1)^2}=\frac{3}{8}\neq 0 \Rightarrow (f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right))}=\frac{1}{f'(\boxed{\ln 3})}=\frac{8}{3}$$

<u>En $-\frac{1}{4}$</u> : On recherche pour commencer l'antécédent de $-\frac{1}{4}$ par f appartenant à l'intervalle $\mathbb{R}$

$$f(x)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1}=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(e^x-1)=-(e^x+1) \Leftrightarrow 5e^x=3 \Leftrightarrow e^x=\frac{3}{5} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

donc l'antécédent de $-\frac{1}{4}$ par f appartenant à $\mathbb{R}$ est $\boxed{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$, ce qui montre que $f^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)=\boxed{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$ et

$$f'(f^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right))=f'(\boxed{\ln\left(\frac{3}{5}\right)})=\frac{2e^{\ln(3/5)}}{(e^{\ln(3/5)}+1)^2}=\frac{2\times\frac{3}{5}}{(\frac{3}{5}+1)^2}=\frac{15}{32}\neq 0 \Rightarrow (f^{-1})'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{f'(f^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right))}=\frac{1}{f'\left(\boxed{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}\right)}$$

6. Soit x un élément de $]-1,1[$, recherchons son antécédent t par f

$$f(t)=x \Leftrightarrow \frac{e^t-1}{e^t+1}=x \Leftrightarrow e^t-1=x(e^t+1) \Leftrightarrow e^t(1-x)=1+x \Leftrightarrow e^t \underset{x\in]-1,1[}{=} \frac{1+x}{1-x}>0 \Leftrightarrow t=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Par conséquent, l'antécédent de x est $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, ce qui nous permet d'écrire

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f'(f^{-1}(x)) &= f'\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)=\frac{2\exp\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)}{(\exp\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)+1)^2}=\frac{2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\left(\frac{1+x}{1-x}+1\right)^2}=\frac{2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\left(\frac{2}{1-x}\right)^2}=\frac{(1+x)(1-x)}{2}=\frac{1-x^2}{2} \\ (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{2}{1-x^2} \end{aligned}$$

7. D'après le calcul précédent, $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ est l'antécédent de x par f donc, par définition de la réciproque, on obtient

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

8. La fonction $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$ (comme quotient de deux fonctions C^1 sur $]-1,1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1,1[$) et $\forall x \in]-1,1[,\quad \dfrac{1+x}{1-x} > 0$, on en déduit, la fonction $x \mapsto \ln x$ étant C^1 sur $]0,+\infty[$, que $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$. Par conséquent, la fonction f^{-1} est de classe C^1, donc dérivable, sur $]-1,1[$.
9. Le graphe est page 14

correction de l'exercice 6

1. La fonction f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ (comme produit de deux fonctions de classe C^1 sur $]0,+\infty[$) et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = 1 \times \ln x + \frac{1}{x} \times x = 1 + \ln x$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \exp(-1) = \frac{1}{e}$$

Par conséquent, le tableau des variations de la fonction f est donnée par

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

La limite en 0 s'obtient par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$.

2. La fonction f est continue sur $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right[$ (car elle y est C^1) et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right[$ sur $f\left(\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right[\right) = \left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right[$.

3. La fonction f est dérivable sur $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right[$ et les calculs de la question 1 montre que la dérivée de f s'annule sur $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right[$ seulement en $x = \dfrac{1}{e}$. Par conséquent, la réciproque f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]\dfrac{1}{e},+\infty\right[\right) = \left]-\dfrac{1}{e},+\infty\right[$ (et sa représentation graphique présente une demi-tangente verticale au point d'abscisse $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$.

4. <u>En 0</u> : On recherche pour commencer l'antécédent de 0 par f appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right[$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln x = 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

donc l'antécédent de 0 par f appartenant à $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right[$ est $\boxed{1}$, ce qui montre que $f^{-1}(0) = \boxed{1}$ et

$$f'(f^{-1}(0)) = f'(\boxed{1}) = 1 \neq 0 \Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(\boxed{1})} = 1$$

Ensuite, il est immédiat que

$$f(e) = e\ln e = e \qquad f(e^2) = e^2\ln(e^2) = 2e^2\ln e = 2e^2$$

<u>En e</u> : Puisque $f(e) = e$, on en déduit que $\boxed{e}$ est un antécédent de e par f et comme $\boxed{e} \in \left[\dfrac{1}{e},+\infty\right[$, on en déduit que $\boxed{e}$ est l'antécédent cherché, ce qui montre que $f^{-1}(e) = \boxed{e}$ et

$$f'(f^{-1}(e)) = f'(\boxed{e}) = 1 + \ln e = 2 \Rightarrow (f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(f^{-1}(e))} = \frac{1}{f'(\boxed{e})} = \frac{1}{2}$$

En $2e^2$: Puisque $f(e^2) = 2e^2$, on en déduit que $\boxed{e^2}$ est un antécédent de $2e^2$ par f et comme $\boxed{e^2} \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$, on en déduit que $\boxed{e^2}$ est l'antécédent cherché, ce qui montre que $f^{-1}(2e^2) = \boxed{e^2}$ et

$$f'(f^{-1}(2e^2)) = f'(\boxed{e^2}) = 1 + \ln e^2 = 1 + 2\ln e = 1 + 2 = 3 \Rightarrow (f^{-1})'(2e^2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2e^2))} = \frac{1}{f'(\boxed{e^2})} = \frac{1}{3}$$

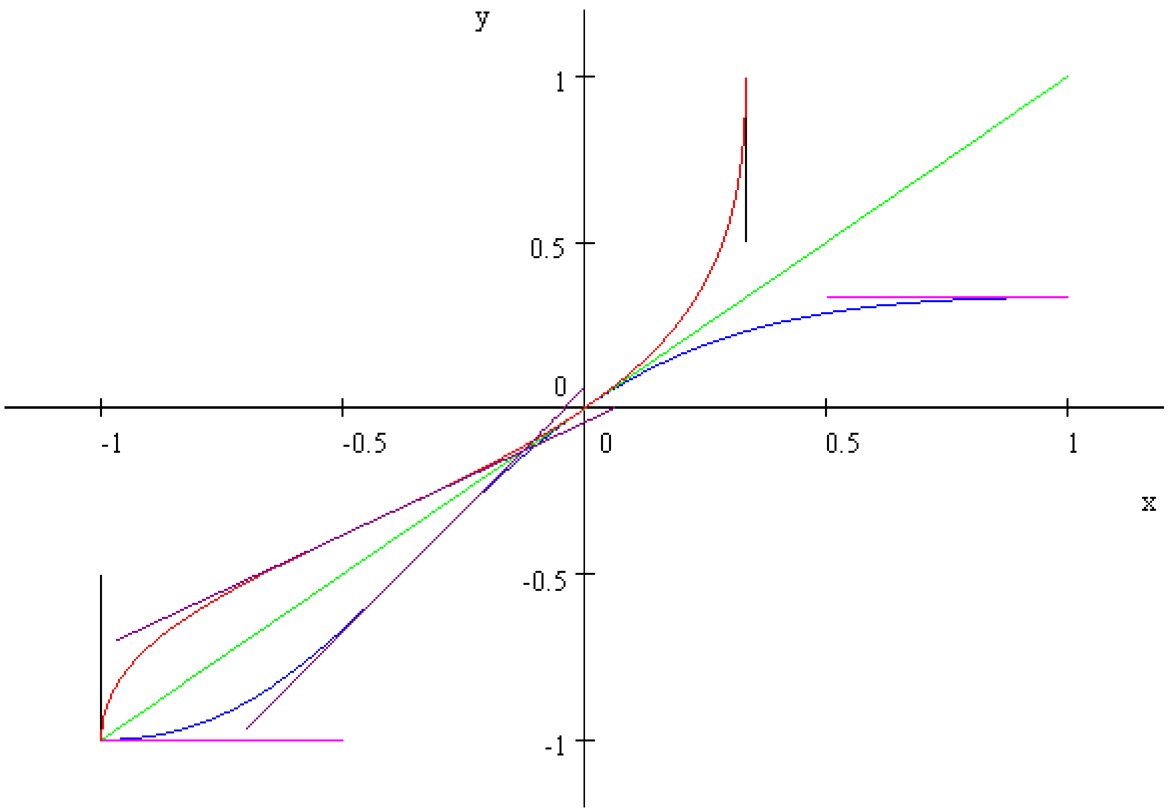
5. Tangente horizontale à $\mathcal{C}_f$: D'après les calculs précédents, la dérivée de f s'annule seulement en $x = \frac{1}{e}$ donc la courbe représentative de f possède une tangente horizontale au point d'abscisse $x = \frac{1}{e}$.
Convexité et points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$: Pour commencer, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (raisonnement identique au cas C^1) et l'on a

$$\forall x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[, \quad f''(x) = [1 + \ln x]' = \frac{1}{x} > 0$$

Par conséquent, la fonction f n'admet pas de point d'inflexion et elle est convexe sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.
Le graphe est page 15

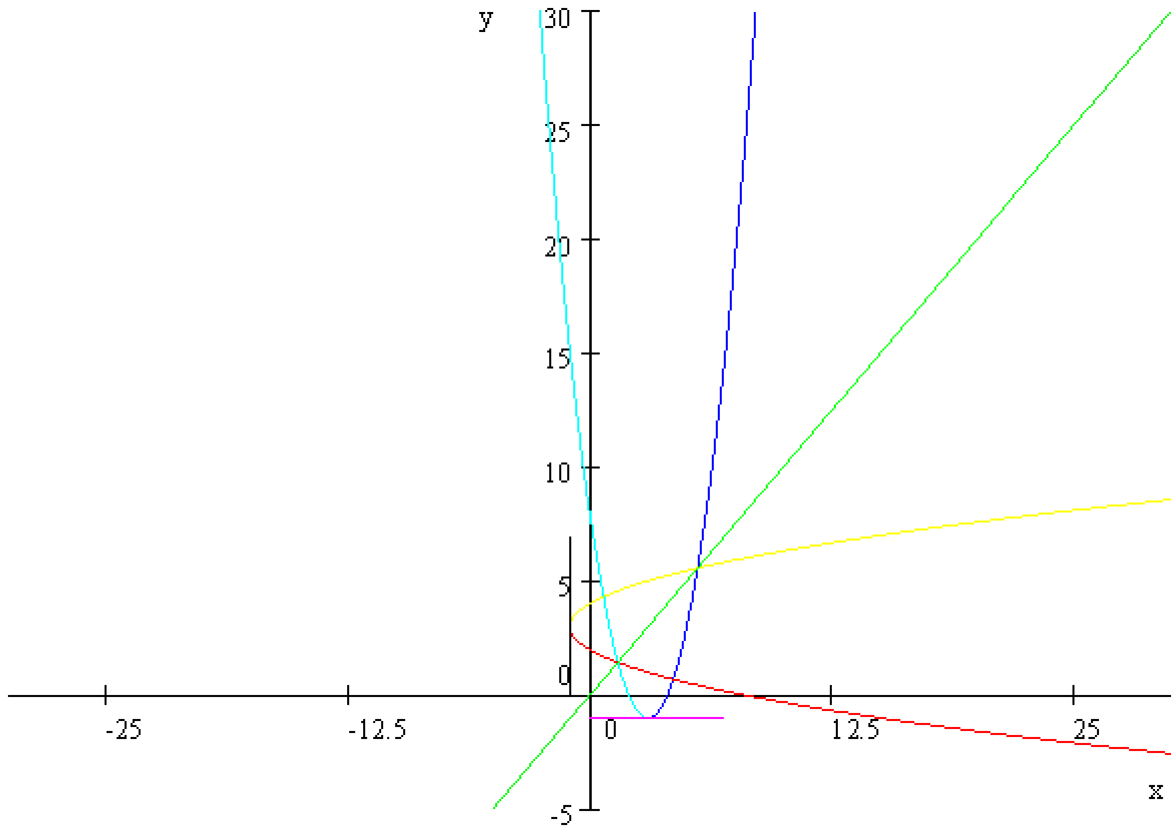
Graphe de l'exercice 1 : La courbe représentative

- de f sur l'intervalle $[-1, 1]$ est tracée en bleu
- de g sur l'intervalle $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ est tracée en rouge
- de la droite d'équation $y = x$ est tracée en vert.
- des tangentes horizontales de $\mathcal{C}_f$ sont tracées en magenta
- des tangentes verticales de $\mathcal{C}_g$ sont tracées en noir
- les tangentes aux points d'inflexion sont tracées en pourpre



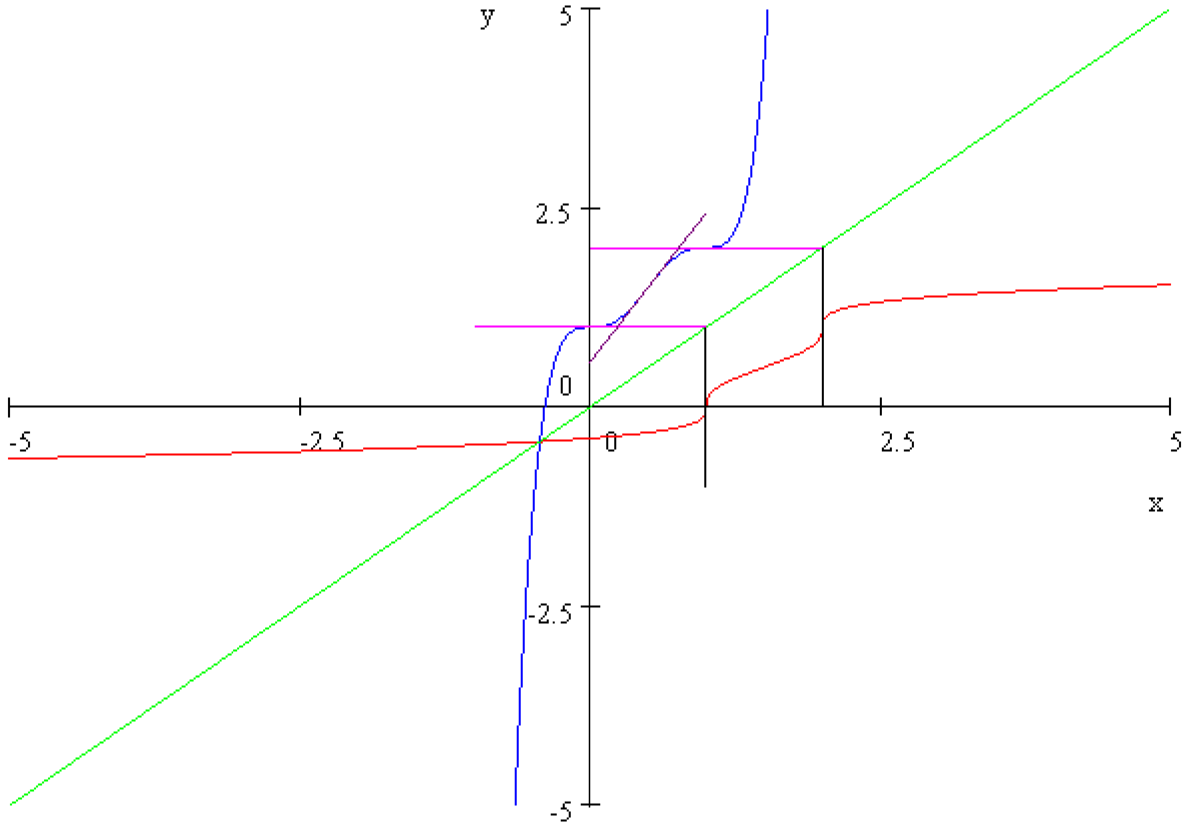
Graphe de l'exercice 2 : La courbe représentative

- de f sur l'intervalle $[3, +\infty[$ est tracée en bleu foncé
- de f sur l'intervalle $]-\infty, 3]$ est tracée en bleu clair
- de g sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ est tracée en rouge
- de h sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ est tracée en jaune
- de la droite d'équation $y = x$ est tracée en vert.
- des tangentes horizontales de $\mathcal{C}_f$ sont tracées en magenta
- des tangentes verticales de $\mathcal{C}_g$ sont tracées en noir



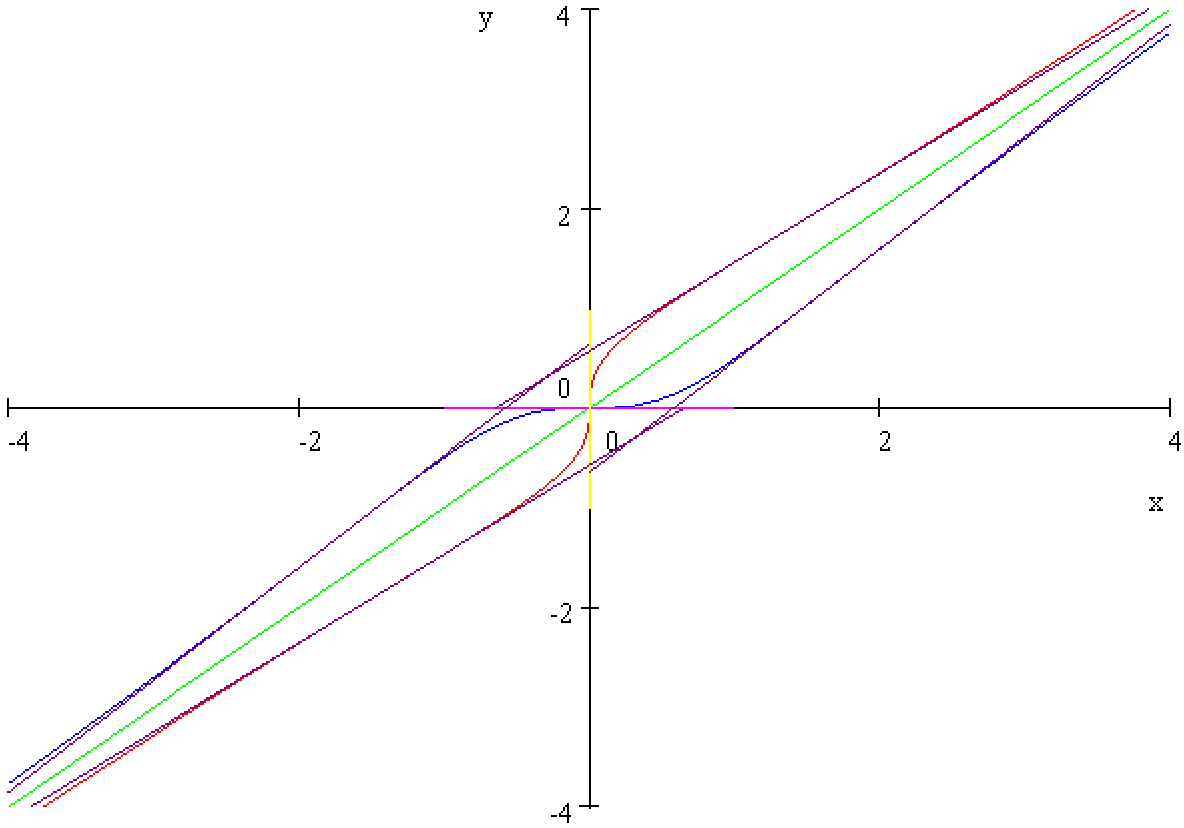
Graphe de l'exercice 3 : La courbe représentative

- de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est tracée en bleu
- de g sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est tracée en rouge
- de la droite d'équation $y = x$ est tracée en vert.
- des tangentes horizontales de $\mathcal{C}_f$ sont tracées en magenta
- des tangentes verticales de $\mathcal{C}_g$ sont tracées en noir
- les tangentes aux points d'inflexion sont tracées en pourpre (sauf pour $x = 0$ et $x = 1$ qui sont à la fois des points d'inflexion et des points où les tangentes sont horizontales)



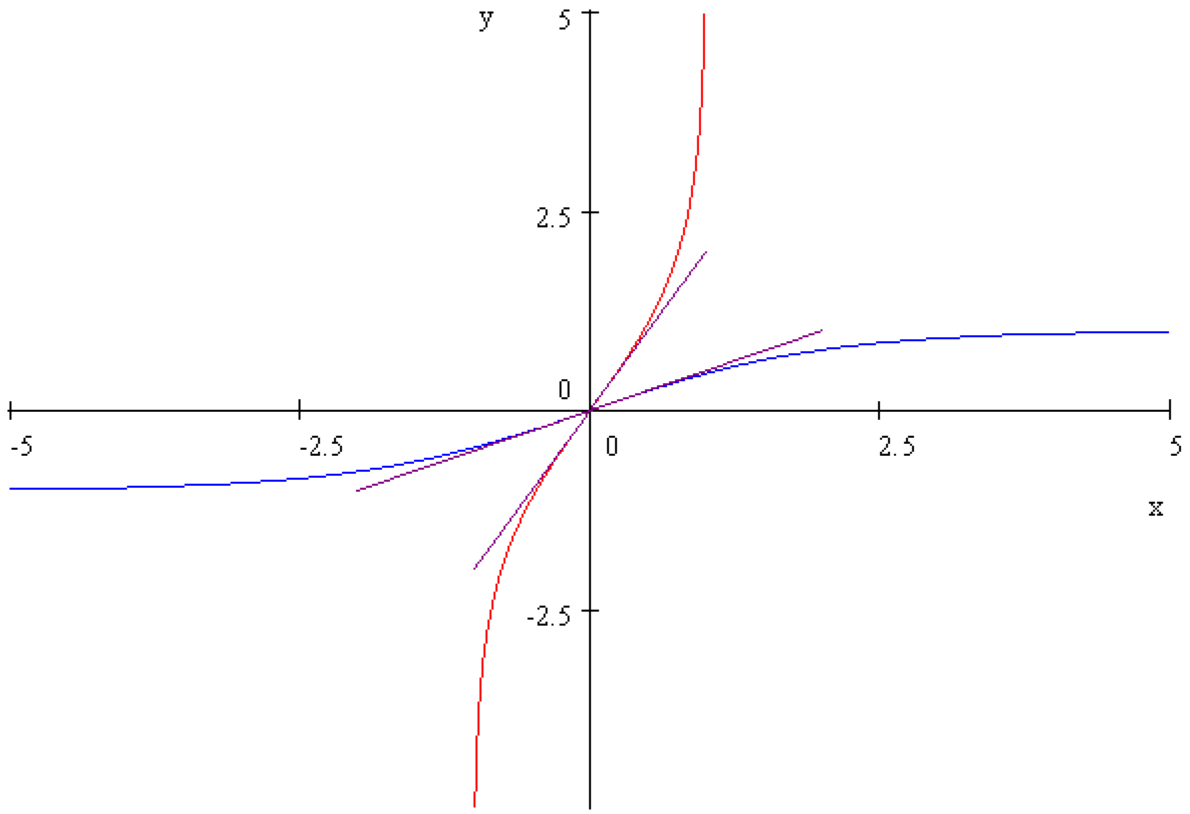
Graphe de l'exercice 4 : La courbe représentative

- de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est tracée en bleu
- de g sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est tracée en rouge
- de la droite d'équation $y = x$ est tracée en vert.
- des tangentes horizontales de $\mathcal{C}_f$ sont tracées en magenta
- des tangentes verticales de $\mathcal{C}_g$ sont tracées en jaune
- les tangentes aux points d'inflexion sont tracées en pourpre (sauf pour $x = 0$ qui est à la fois un point d'inflexion et un point où la tangentes est horizontale)



Graphe de l'exercice 5 : La courbe représentative

- de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est tracée en bleu
- de g sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est tracée en rouge
- de la droite d'équation $y = x$ est tracée en vert.
- les tangentes aux points d'inflexion sont tracées en pourpre



Graphe de l'exercice 6 : La courbe représentative

- de f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ est tracée en bleu foncé
- de f sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ est tracée en bleu clair
- de f^{-1} sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$ est tracée en rouge
- des tangentes horizontales de $\mathcal{C}_f$ sont tracées en magenta
- des tangentes verticales de $\mathcal{C}_g$ sont tracées en noir
- de la droite d'équation $y = x$ est tracée en vert.