

correction de l'exercice 1

Pour la justification de la continuité des fonctions considérées, je laisse le lecteur revoir son cours correspondant ou la feuille d'exercices correspondante.

[a] La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $1 \in]0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_1^x (\ln t) dt = a(x)$ est définie et C^1 sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad a'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_1^x (\ln t) dt \right) = \ln x$$

[b] La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)}$ est continue sur

$$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

et $-2 \in]-\infty, -1[$ donc la fonction $x \mapsto \int_{-2}^x \frac{dt}{1-t^2} = b(x)$ est définie et C^1 sur $] -\infty, -1[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-\infty, -1[, \quad b'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{-2}^x \frac{dt}{1-t^2} \right) = \frac{1}{1-x^2}$$

[c] La fonction

$$t \mapsto \sqrt{t^4 - 1} = \sqrt{(t^2 - 1)(t^2 + 1)} = \sqrt{(t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)}$$

est continue sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et $-3 \in] -\infty, -1[$ donc la fonction $x \mapsto \int_{-3}^x \sqrt{t^4 - 1} dt = c(x)$ est définie et C^1 sur $] -\infty, -1[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-\infty, -1[, \quad c'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{-3}^x \sqrt{t^4 - 1} dt \right) = \sqrt{x^4 - 1}$$

[d] On commence par utiliser la relation de Chasles pour nous ramener directement à l'énoncé du théorème

$$\int_x^1 \frac{t}{\sqrt{t^3 + 1}} dt = - \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3 + 1}} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3 + 1}}$ est continue sur $] -1, +\infty[$ et $-1 \in] -1, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3 + 1}} dt$ est définie et C^1 sur $] -1, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \frac{d}{dx} \left(\int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3 + 1}} dt \right) = \frac{x}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

Par conséquent, la fonction $d : x \mapsto \int_x^1 \frac{t}{\sqrt{t^3 + 1}} dt = - \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3 + 1}} dt$ est définie et C^1 sur $] -1, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad d'(x) = - \frac{x}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

[e] La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4 + 1}$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$ (le dénominateur est la somme de deux réels positifs dont l'un est non nul) et $-1 \in] -\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_{-1}^x \frac{dt}{t^4 + 1} = e(x)$ est définie et C^1 sur $] -\infty, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-\infty, +\infty[, \quad e'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{-1}^x \frac{dt}{t^4 + 1} \right) = \frac{1}{x^4 + 1}$$

f La fonction $t \mapsto \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$ et $1 \in] 0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_1^x \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = f(x)$ est définie et C^1 sur $] 0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in] 0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_1^x \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \right) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

g On commence par utiliser la relation de Chasles pour nous ramener directement à l'énoncé du théorème

$$\int_x^{-4} \sqrt{1+t^2} dt = - \int_{-4}^x \sqrt{1+t^2} dt$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$ et $-4 \in] -\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_{-4}^x \sqrt{1+t^2} dt$ est définie et C^1 sur $] -\infty, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in] -\infty, +\infty[, \quad g'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{-4}^x \sqrt{1+t^2} dt \right) = \sqrt{1+x^2}$$

Par conséquent, la fonction $g : x \mapsto \int_x^{-4} \sqrt{1+t^2} dt = - \int_{-4}^x \sqrt{1+t^2} dt$ est définie et C^1 sur $] -\infty, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in] -\infty, +\infty[, \quad d'(x) = -\sqrt{1+x^2}$$

h La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t(1-t)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} =] -\infty, 0[\cup] 0, 1[\cup] 1, +\infty[$ et $\frac{1}{2} \in] 0, 1[$ donc la fonction $x \mapsto \int_{1/2}^x \frac{dt}{t^2-t} = h(x)$ est définie et C^1 sur $] 0, 1[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in] 0, 1[, \quad h'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{1/2}^x \frac{dt}{t^2-t} \right) = \frac{1}{x^2-x}$$

correction de l'exercice 2

On rappelle que pour étudier la parité éventuelle d'une fonction f , il est nécessaire que l'ensemble de définition de f soit symétrique par rapport à 0 et, dans le cas des fonctions définies par des intégrales dépendant des bornes (du type

$x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$, on utilise le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $f(-x)$.

Pour finir, remarquons que $u = -t \Leftrightarrow t = -u$ et $dt = -du$ (et l'on n'oublie pas de changer les bornes d'intégration)

a La fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t - e^{-t}}$ est continue sur $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$

$$(e^t = e^{-t} \Leftrightarrow t = -t \Leftrightarrow 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0)$$

et 0 n'appartient ni à l'intervalle $] -\infty, 0[$, ni à l'intervalle $] 0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt$ n'est pas définie !!

b La fonction $t \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$ (le dénominateur est la somme de réels strictement positifs) et $0 \in] -\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$ est définie sur $] -\infty, +\infty[$

Etude du signe : Pour commencer, le signe de $\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ est celui de $e^t - e^{-t}$

$$e^t - e^{-t} \geq 0 \Leftrightarrow e^t \geq e^{-t} \Leftrightarrow t \geq -t \Leftrightarrow 2t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$$

Premier cas $x \geq 0$ (bornes dans l'ordre croissant). La fonction $t \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ est positive \mathbb{R}_+ donc sur $[0, x] \subset \mathbb{R}_+$. En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x \geq 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt = b(x)$ est positive

Second cas $x \leq 0$ (bornes dans l'ordre décroissant). On commence par utiliser la relation de Chasles

$$b(x) = \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt = - \int_x^0 \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ est négative sur \mathbb{R}_- donc sur $[x, 0] \subset \mathbb{R}_-$. En outre, l'intégration dans l'intégrale $\int_x^0 \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$

portant sur des bornes croissantes ($x \leq 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_x^0 \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$ est négative, ce qui implique que

$$b(x) = - \int_x^0 \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt \text{ est positive.}$$

Par conséquent, la fonction b est positive sur \mathbb{R} tout entier.

Parité de b : Pour commencer, l'ensemble de définition de b est symétrique par rapport à 0. Ensuite, en utilisant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $b(-x)$, on en déduit que

$$b(-x) = \int_0^{-x} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt = \int_0^x \frac{e^{-u} - e^{-(-u)}}{e^{-u} + e^{-(-u)}} (-du) = \int_0^x - \frac{e^{-u} - e^u}{e^{-u} + e^u} du = \int_0^x \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} du = b(x)$$

donc la fonction b est paire.

[c] La fonction $t \mapsto |t|$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$ et $0 \in] -\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x |t| dt$ est définie sur $] -\infty, +\infty[$

Etude du signe :

Premier cas $x \geq 0$ (bornes dans l'ordre croissant). La fonction $t \mapsto |t|$ est positive \mathbb{R}_+ donc sur $[0, x] \subset \mathbb{R}_+$. En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x \geq 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_0^x |t| dt = c(x)$ est positive

Second cas $x \leq 0$ (bornes dans l'ordre décroissant). On commence par utiliser la relation de Chasles

$$c(x) = \int_0^x |t| dt = - \int_x^0 |t| dt$$

La fonction $t \mapsto |t|$ est positive sur \mathbb{R}_- donc sur $[x, 0] \subset \mathbb{R}_-$. En outre, l'intégration dans l'intégrale $\int_x^0 |t| dt$ portant sur

des bornes croissantes ($x \leq 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_x^0 |t| dt$ est positive, ce qui implique que $c(x) = - \int_x^0 |t| dt$ est négative.

Par conséquent, la fonction c est négative sur \mathbb{R}_- et positive sur \mathbb{R}_+ .

Parité de c : Pour commencer, l'ensemble de définition de c est symétrique par rapport à 0. Ensuite, en utilisant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $c(-x)$, on en déduit que

$$c(-x) = \int_0^{-x} |t| dt = \int_0^x |-u| (-du) = \int_0^x -|u| du = - \int_0^x |u| du = -c(x)$$

donc la fonction c est impaire.

[d] La fonction $t \mapsto |t|^3$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$ et $1 \in] -\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_1^x |t|^3 dt$ est définie sur $] -\infty, +\infty[$

Etude du signe :

Premier cas $x \geq 1$ (bornes dans l'ordre croissant). La fonction $t \mapsto |t|$ est positive $[1, +\infty[$ donc sur $[1, x] \subset [1, +\infty[$. En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x \geq 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_1^x |t|^3 dt = d(x)$ est positive

Second cas $x \leq 1$ (bornes dans l'ordre décroissant). On commence par utiliser la relation de Chasles

$$d(x) = \int_1^x |t|^3 dt = - \int_x^1 |t|^3 dt$$

La fonction $t \mapsto |t|^3$ est positive sur $] -\infty, 1]$ donc sur $[x, 1] \subset] -\infty, 1]$. En outre, l'intégration dans l'intégrale $\int_x^1 |t|^3 dt$ portant sur des bornes croissantes ($x \leq 1$), on en déduit que l'intégrale $\int_x^1 |t|^3 dt$ est positive, ce qui implique que $d(x) = - \int_x^1 |t|^3 dt$ est négative.

Par conséquent, la fonction d est négative sur $] -\infty, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.

Parité de d : Pour commencer, l'ensemble de définition de c est symétrique par rapport à 0. Ensuite, en utilisant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $d(-x)$, on en déduit que

$$d(-x) = \int_1^{-x} |t|^3 dt = \int_{-1}^x |-u|^3 (-du) = \int_{-1}^x -|u|^3 du = - \int_{-1}^x |u|^3 du \neq \pm d(x) \left(= \pm \int_1^x |u|^3 du \right)$$

donc la fonction d ne possède pas de parité.

[e] La fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $0 \in [0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1}$ est définie sur $[0, +\infty[$

Etude du signe : Puisque $x \geq 0$, l'intégration porte sur des bornes croissantes et la fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1}$ étant positive, on en

déduit que l'intégrale $\int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1} dt = e(x)$ est positive.

Par conséquent, la fonction e est positive sur son domaine de définition \mathbb{R}_+ .

Parité de e : L'ensemble de définition de c n'étant pas symétrique par rapport à 0, on en déduit que e ne peut posséder de parité.

[f] La fonction $t \mapsto \exp(-t^2)$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$ et $1 \in] -\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_1^x \exp(-t^2) dt$ est définie

sur $] -\infty, +\infty[$

Etude du signe :

Premier cas $x \geq 1$ (bornes dans l'ordre croissant). La fonction $t \mapsto \exp(-t^2)$ est positive $[1, +\infty[$ donc sur $[1, x] \subset [1, +\infty[$.

En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x \geq 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_1^x \exp(-t^2) dt = f(x)$ est positive

Second cas $x \leq 1$ (bornes dans l'ordre décroissant). On commence par utiliser la relation de Chasles

$$f(x) = \int_1^x \exp(-t^2) dt = - \int_x^1 \exp(-t^2) dt$$

La fonction $t \mapsto \exp(-t^2)$ est positive sur $] -\infty, 1]$ donc sur $[x, 1] \subset] -\infty, 1]$. En outre, l'intégration dans l'intégrale $\int_x^1 \exp(-t^2) dt$ portant sur des bornes croissantes ($x \leq 1$), on en déduit que l'intégrale $\int_x^1 \exp(-t^2) dt$ est positive, ce qui

implique que $f(x) = - \int_x^1 \exp(-t^2) dt$ est négative.

Par conséquent, la fonction f est négative sur $] -\infty, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.

Parité de f : Pour commencer, l'ensemble de définition de f est symétrique par rapport à 0. Ensuite, en utilisant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $d(-x)$, on en déduit que

$$f(-x) = \int_1^{-x} \exp(-t^2) dt = \int_{-1}^x \exp(-(-u)^2) (-du) = \int_{-1}^x -\exp(-u^2) du = -\int_{-1}^x \exp(-u^2) du \neq \pm f(x) \left(= \pm \int_1^x \exp(-u^2) du \right)$$

donc la fonction f ne possède pas de parité.

g La fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$ et $0 \in] -\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$ est définie sur $] -\infty, +\infty[$

Etude du signe :

Premier cas $x \geq 0$ (bornes dans l'ordre croissant). La fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est positive \mathbb{R}_+ donc sur $[0, x] \subset \mathbb{R}_+$. En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x \geq 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_0^x \sqrt{1+t^2} dt = g(x)$ est positive

Second cas $x \leq 0$ (bornes dans l'ordre décroissant). On commence par utiliser la relation de Chasles

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt = -\int_x^0 \sqrt{1+t^2} dt$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est positive sur \mathbb{R}_- donc sur $[x, 0] \subset \mathbb{R}_-$. En outre, l'intégration dans l'intégrale $\int_x^0 \sqrt{1+t^2} dt$

portant sur des bornes croissantes ($x \leq 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_x^0 \sqrt{1+t^2} dt$ est positive, ce qui implique que

$$g(x) = -\int_x^0 \sqrt{1+t^2} dt \text{ est négative.}$$

Par conséquent, la fonction g est négative sur \mathbb{R}_- et positive sur \mathbb{R}_+ .

Parité de g : Pour commencer, l'ensemble de définition de g est symétrique par rapport à 0. Ensuite, en utilisant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $g(-x)$, on en déduit que

$$g(-x) = \int_0^{-x} \sqrt{1+t^2} dt = \int_0^x \sqrt{1+(-u)^2} (-du) = \int_0^x -\sqrt{1+u^2} du = -\int_0^x \sqrt{1+u^2} du = -g(x)$$

donc la fonction g est impaire.

h La fonction

$$t \mapsto \frac{1}{1-t^4} = \frac{1}{(1-t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}$$

est continue sur

$$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

et $0 \in]-1, 1[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1-t^4} dt$ est définie sur $] -1, 1[$

Etude du signe :

Premier cas $0 \leq x < 1$ (bornes dans l'ordre croissant). La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t^4}$ est positive $[0, 1[$ donc sur $[0, x] \subset [0, 1[$. En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x \geq 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_0^x \frac{1}{1-t^4} dt = h(x)$ est positive

Second cas $-1 < x \leq 0$ (bornes dans l'ordre décroissant). On commence par utiliser la relation de Chasles

$$h(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^4} dt = -\int_x^0 \frac{1}{1-t^4} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t^4}$ est positive sur $] -1, 0[$ donc sur $[x, 0] \subset] -1, 0[$. En outre, l'intégration dans l'intégrale $\int_x^0 \frac{1}{1-t^4} dt$ portant sur des bornes croissantes ($x \leq 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_x^0 \frac{1}{1-t^4} dt$ est positive, ce qui implique que

$$h(x) = - \int_x^0 \frac{1}{1-t^4} dt \text{ est négative.}$$

Par conséquent, la fonction h est négative sur $] -1, 0[$ et positive sur $[0, 1[$.

Parité de h : Pour commencer, l'ensemble de définition de h est symétrique par rapport à 0. Ensuite, en utilisant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $g(-x)$, on en déduit que

$$h(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1-t^4} dt = \int_0^x \frac{1}{1-(-u)^4} (-du) = \int_0^x -\frac{1}{1-u^4} du = - \int_0^x \frac{1}{1-u^4} du = -h(x)$$

donc la fonction h est impaire.

correction de l'exercice 3

1. Caractère C^1 : La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$ et $0 \in] -\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = F(x)$ est C^1 sur $] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Parité de F : On constate que le domaine de définition de F est symétrique par rapport à 0 et en utilisant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $F(-x)$, on a

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \frac{(-du)}{1+(-u)^2} = \int_0^x -\frac{1}{1+u} du = - \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du = -F(x)$$

donc la fonction F est impaire.

Signe de F : Lorsque $x \geq 0$ (intégration sur des bornes croissantes). La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est positive sur $[0, +\infty[$ donc sur $[0, x] \subset [0, +\infty[$. En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x \geq 0$), on en déduit que l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = F(x) \text{ est positive}$$

Puisque F est impaire, on en déduit que $F(x)$ est négatif sur $] -\infty, 0[$.

Par conséquent, la fonction h est négative sur $] -\infty, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$.

2. Justification de la première inégalité :

Les facteurs des deux quotients étant tous positifs, on peut effectuer le produit en croix, ce qui nous donne

$$\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{(1+t)^2} \Leftrightarrow (1+t)^2 \leq 2(1+t^2) \Leftrightarrow 1+2t+t^2 \leq 2+2t^2 \Leftrightarrow 0 \leq t^2-2t+1 = (t-1)^2$$

Cette dernière inégalité étant vraie sur \mathbb{R}_+ , on en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{(1+t)^2}$

Justification de la seconde inégalité :

Puisque x est positif, en intégrant sur $[0, x]$ l'inégalité $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{(1+t)^2}$ (l'intégration portant sur des bornes croissantes), on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} &\leq \int_0^x \frac{2}{(1+t)^2} dt \Leftrightarrow F(x) \leq 2 \int_0^x (1+t)^{-2} dt \Leftrightarrow F(x) \leq 2 \left[\frac{(1+t)^{-2+1}}{-2+1} \right]_{t=0}^{t=x} \Leftrightarrow F(x) \leq 2 \left[\frac{-1}{1+t} \right]_{t=0}^{t=x} \\ &\Leftrightarrow F(x) \leq 2 \left(1 - \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\geq 0} \right) \Rightarrow F(x) \leq 2 \end{aligned}$$

3. La question 2 montre que la fonction F est majorée sur \mathbb{R}_+ par 2. Pour montrer que F admet une limite finie en $+\infty$, il suffit de montrer qu'elle est croissante.

D'après la question 1, la fonction F est C^1 sur \mathbb{R} et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

donc la fonction F est strictement croissante. Le théorème de monotonie s'applique donc et la fonction F admet une limite finie L en $+\infty$. Pour finir, la fonction F étant majorée sur \mathbb{R} par 2, la limite L est inférieure (au sens large) à 2.

4. La majoration demandée n'est autre que la majoration

$$\forall x \geq 0, \quad \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \geq \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2}$$

Il suffit donc de montrer que $\frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{(1+t)^2}$ sur \mathbb{R}_+ . Les facteurs de ces deux quotients étant strictement positifs, on peut effectuer le produit en croix, ce qui nous donne

$$\frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{(1+t)^2} \Leftrightarrow (1+t)^2 \geq 1+t^2 \Leftrightarrow 1+2t+t^2 \geq 1+t^2 \Leftrightarrow 2t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée sur \mathbb{R}_+ , on en déduit que la première est également vérifiée sur \mathbb{R}_+ .

Puisque x est positif, en intégrant sur $[0, x]$ l'inégalité $\frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{(1+t)^2}$ (l'intégration portant alors sur des bornes croissantes), on obtient

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \geq \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2} \Leftrightarrow F(x) \geq \left[\frac{-1}{1+t} \right]_{t=0}^{t=x} \Leftrightarrow F(x) \geq 1 - \frac{1}{1+x}$$

En faisant x vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient $L \geq 1$.

5. C'est le théorème de bijection qui est demandé.

La fonction F est continue sur \mathbb{R} (car C^1 d'après la question 1) et strictement croissante sur \mathbb{R} (sa dérivée étant strictement positive sur \mathbb{R} , cf. question 3), on en déduit que F réalise une bijection de \mathbb{R} sur

$$f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right[=]-L, L[.$$

(puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$, la parité de F montre que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -L$).

A la question 4, on a montré que $1 \leq L \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \in]-L, L[$ et l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet bien une et une seule solution sur \mathbb{R} (existence et unicité de l'antécédent de $\frac{1}{2}$ par F)

6. (a) La fonction F est C^1 sur \mathbb{R}_+^\times , la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est aussi C^1 sur \mathbb{R}_+^\times et comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^\times$, on en déduit que la fonction $x \mapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$ est C^1 sur \mathbb{R}_+^\times , ce qui implique que la fonction G est C^1 (donc dérivable) sur \mathbb{R}_+^\times . Sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, \quad G'(x) = F'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

La fonction G étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times =]0, +\infty[$ et sa dérivée étant nulle sur cet intervalle, on en déduit que la fonction G est constante sur \mathbb{R}_+^\times .

(b) A la question précédente, on a montré l'existence d'une constante C telle que

$$\forall x > 0, \quad F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = C$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on en déduit que

$$L + F(0) = C \Leftrightarrow L = C$$

Par conséquent, la limite L est égale à la constante C . En choisissant $x = 1$ dans l'égalité $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = C$, on obtient que $2F(1) = C$ donc $L = 2F(1)$.

correction de l'exercice 4

1. La fonction $s \mapsto \frac{s^3}{s^2-1} = \frac{s^3}{(s-1)(s+1)}$ est continue sur

$$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

et $2 \in]1, +\infty[$ donc la fonction F est définie et C^1 sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad F'(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

2. Il suffit de montrer que $\forall s \geq 2, \quad s \leq \frac{s^3}{s^2-1} \leq s + \frac{1}{s-1}$.

$$s \leq \frac{s^3}{s^2-1} \leq s + \frac{1}{s-1} \Leftrightarrow s^3 - s \leq s^3 \leq \left(s + \frac{1}{s-1}\right)(s^2-1) \Leftrightarrow s^3 - s \leq s^3 \leq s^3 + 1 \Leftrightarrow -s \leq 0 \leq 1$$

Ce dernier encadrement étant vrai sur $[2, +\infty[$, on en déduit que l'inégalité demandée est vraie sur $[2, +\infty[$.

Puisque $x \geq 2$, en intégrant l'inégalité donnée sur $[2, +\infty[$ (l'intégration portant sur des bornes croissantes), on obtient

$$\begin{aligned} \forall x \geq 2, \quad \int_2^x ds &\leq \int_2^x \frac{s^2}{s^2-1} ds \leq \int_2^x \left(s + \frac{1}{s-1}\right) ds \Leftrightarrow \left[\frac{s^2}{2}\right]_{s=2}^{s=x} \leq F(x) \leq \left[\frac{s^2}{2} + \ln|s-1|\right]_{s=2}^{s=x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \geq 2, \quad \frac{x^2}{2} - 2 \leq F(x) \leq \frac{x^2}{2} + \ln(x-1) - 2 \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} - 2\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| - 2\right) = +\infty$, le théorème d'encadrement montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

En divisant l'encadrement précédent par x^2 , on obtient l'encadrement suivant

$$\forall x \geq 2, \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \leq \frac{F(x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{\ln(x-1)}{x^2} - \frac{2}{x^2}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln(x-1)}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$, le théorème d'encadrement montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

correction de l'exercice 5

1. La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $1 \in]0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt = F(x)$ est définie et

C^1 sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad F'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$$

2. La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. L'intégrale $G(x)$ existe donc si et seulement si x et $\frac{1}{x}$ appartiennent à $]0, +\infty[$, c'est-à-dire si $x \in]0, +\infty[$ donc $\mathcal{D}_G =]0, +\infty[$.

En utilisant la relation de Chasles par rapport au point 1, on a

$$G(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt - \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$$

3. La fonction F est C^1 sur \mathbb{R}_+^\times , la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est aussi C^1 sur \mathbb{R}_+ et comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^\times$, on en déduit que la fonction $x \mapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$ est C^1 sur \mathbb{R}_+^\times , ce qui implique que la fonction G est C^1 (donc dérivable) sur \mathbb{R}_+^\times . Sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, \quad G'(x) = F'(x) - \left(\frac{1}{x}\right)' F'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln x}{1+x^2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{-\ln x}{1+x^2} = 0$$

La fonction G étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times =]0, +\infty[$ et sa dérivée étant nulle sur cet intervalle, on en déduit que la fonction G est constante sur \mathbb{R}_+^\times . Pour expliciter la constante, il suffit d'évaluer G en $x = 1$. Or l'intégrale $G(1) = \int_1^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ est nulle donc la fonction G est nulle.

correction de l'exercice 6

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$. Par conséquent, l'intégrale $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ existe si et seulement x et $2x$ appartiennent à $]-\infty, +\infty[$, ce qui est toujours le cas donc F est définie sur $]-\infty, +\infty[$.
2. Pour justifier cet encadrement sur \mathbb{R}_+ , nous allons procéder par équivalence, en passant à l'inverse (puisque chaque membre de l'encadrement est positif) puis en élevant au carré (toujours la même raison)

$$\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow t \leq \sqrt{t^2+1} \leq t+1 \Leftrightarrow t^2 \leq t^2+1 \leq (t+1)^2 \Leftrightarrow t^2 \leq t^2+1 \leq t^2+2t+1$$

Ce dernier encadrement étant évidemment vrai sur \mathbb{R}_+ , on en déduit que $\forall t \geq 0 \quad \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{t}$.

Puisque $x \leq 2x$ (car $x \geq 0$), en intégrant sur $[x, 2x]$, l'intégration portant sur des bornes croissantes, on obtient

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{1}{t+1} dt &\leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \Leftrightarrow [\ln|t+1|]_{t=x}^{t=2x} \leq F(x) \leq [\ln|t|]_{t=x}^{t=2x} \Leftrightarrow \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq F(x) \leq \ln(2x) - \ln(x) \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leq F(x) \leq \ln\left(\frac{2x}{x}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leq F(x) \leq \ln 2 \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln 2 = \ln 2$ (sic), le théorème d'encadrement montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln 2$.

3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$ et $0 \in]-\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = G(x)$ est définie et C^1 (donc dérivable) sur $]-\infty, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

En utilisant la relation de Chasles pour l'intégrale $F(x)$, on a

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = \int_0^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = G(2x) - G(x)$$

Puisque G est C^1 sur \mathbb{R} , la formule précédente montre clairement que F est C^1 sur \mathbb{R} et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = (2x)'G'(2x) - G'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

correction de l'exercice 7

1. Domaine de définition : La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$. Par conséquent, l'intégrale $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$ existe si et seulement x et $2x$ appartiennent à $]-\infty, +\infty[$, ce qui est toujours le cas donc Φ est définie sur $]-\infty, +\infty[$.

Parité : Le domaine de définition de Φ est symétrique par rapport à 0. En effectuant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale $\Phi(-x)$, on a

$$\Phi(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} dt = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+(-u)^4}} (-du) = - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+u^4}} du = -\Phi(x)$$

donc la fonction Φ est impaire.

2. On encadre "à la main" la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ sur l'intervalle $[x, 2x]$

$$\begin{aligned} x \leq t \leq 2x &\Rightarrow x^4 \leq t^4 \leq 16x^4 \Rightarrow 4+x^4 \leq 4+t^4 \leq 4+16x^4 \Rightarrow \sqrt{4+x^4} \leq \sqrt{4+t^4} \leq \sqrt{4+16x^4} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4+16x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{4+x^4}} \quad \forall t \in [x, 2x] \end{aligned}$$

Puisque $x \leq 2x$ (car $x \geq 0$), en intégrant l'inégalité précédente sur $[x, 2x]$ (l'intégration portant sur des bornes croissantes), on obtient

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+16x^4}} &\leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+x^4}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{4+16x^4}} \int_x^{2x} dt \leq \Phi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{4+x^4}} \int_x^{2x} dt \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{4+16x^4}} [t]_{t=x}^{t=2x} dt \leq \Phi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{4+x^4}} [t]_{t=x}^{t=2x} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leq \Phi(x) \leq \frac{x}{\sqrt{4+x^4}} \end{aligned}$$

Puisque l'on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{16x^4 \left(\frac{1}{4x^4} + 1 \right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4x^2 \sqrt{\frac{1}{4x^4} + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^4}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 \left(\frac{4}{x^4} + 1 \right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 \sqrt{\frac{4}{x^4} + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

le théorème d'encadrement montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$.

3. On considère la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$ et $0 \in]-\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} = F(x)$ est définie et C^1 sur $]-\infty, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^4}}$$

En utilisant la relation de Chasles dans l'intégrale $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$, on a

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} = \int_0^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} = F(2x) - F(x)$$

Puisque F est C^1 sur \mathbb{R} , la formule précédente montre clairement que Φ est C^1 sur \mathbb{R} et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(x) = (2x)'F'(2x) - F'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{2}{\sqrt{4+(2x)^4+1}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^4}} = \frac{2}{\sqrt{4+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^4}}$$