correction de l'exercice 1

1.
$$X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in A\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}2a-5b+c=0\\b+c=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}b=-c\\a=-3c\end{array}\right.\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-3c\\-c\\c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Par conséquent, le vecteur $\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$ engendre A et ce vecteur étant non nul, il forme une base de A.

2.
$$X=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}\in B\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha+\gamma-2\delta=0\\\alpha+\beta+\delta=0\\2\alpha-\beta+3\gamma=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cc}\alpha+\gamma-2\delta=0&\textit{Pivot pour }\alpha\\\beta-\gamma+3\delta=0&L_2\leftarrow L_2-L_1\\-\beta+\gamma+4\delta=0&L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cc}\alpha+\gamma-2\delta=0&\\\beta-\gamma+3\delta=0&\textit{Pivot pour }\beta\\7\delta=0&L_3\leftarrow L_3+L_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\delta=0\\\beta=\gamma\\\alpha=-\gamma\end{array}\right.\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-\gamma\\\gamma\\\gamma\\0\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Par conséquent, le vecteur $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ engendre B et ce vecteur étant non nul, il forme une base de B.

3.
$$X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in C\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}2a-3b+c+2d=0\\a-2b-3c-4d=0\\a+b+c+d=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cc}2a-3b+c+2d=0&\textit{Pivot pour }a\\-b-7c-10d=0&L_2\leftarrow 2L_2-L_1\\5b+c=0&L_3\leftarrow 2L_3-L_1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cc}2a-3b+c+2d=0&\\-b-7c-10d=0&\textit{Pivot pour }b\\-34c-50d=0&L_3\leftarrow L_3+5L_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}c=-\dfrac{25}{17}d\\b=\dfrac{5}{17}d\\a=\dfrac{3}{17}d\end{array}\right.\Leftrightarrow X=\frac{d}{17}\begin{pmatrix}3\\5\\-25\\17\end{pmatrix}$$

Par conséquent, le vecteur $\begin{pmatrix}3\\5\\-25\\17\end{pmatrix}$ engendre C et ce vecteur étant non nul, il forme une base de C.

4.
$$X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in D\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}4a-2b+c&=&0\\-2a+4b+c&=&0\\a+b+c&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccc}4a-2b+c&=&0&\textit{Pivot pour }a\\6b+3c&=&0&L_2\leftarrow 2L_2+L_1\\6b+3c&=&0&L_3\leftarrow 4L_3-L_1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccc}4a-2b+c&=&0&\\6b+3c&=&0&\textit{Pivot pour }b\\0&=&0&L_3\leftarrow L_3-L_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}a=-\dfrac12c\\b=-\dfrac12c\end{array}\right.\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-\dfrac{c}{2}\\-\dfrac{c}{2}\\c\end{pmatrix}=-\frac12c\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Par conséquent, le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ engendre D et ce vecteur étant non nul, il forme une base de D.

5.
$$X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in D\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-3&3\\0&-2&4\\0&-4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}2a-3b+3c&=&2a\\-2b+4c&=&2b\\-4b+6c&=&2c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}-3b+3c&=&0\\-4b+4c&=&0\\-4b+4c&=&0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccc}-3b+3c&=&0&\textit{Pivot pour }a\\0&=&0&L_2\leftarrow 3L_2-4L_1\\0&=&0&L_3\leftarrow 3L_3-4L_1\end{array}\right.\Leftrightarrow b=c\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}a\\c\\c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Par conséquent, la famille $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est une famille génératrice de E. En outre, elle est libre car

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0\\ b=0\\ b=0\end{array}\right. \Leftrightarrow a=b=0$$

donc c'est une base de E.

6.

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+2b+3c &=& 6a\\ 3a+b+2c &=& 6b\\ 2a+3b+c &=& 6c\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -5a+2b+3c &=& 0\\ 3a-5b+2c &=& 0\\ 2a+3b-5c &=& 0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -5a+2b+3c &=& 0 & \textit{Pivot pour } a\\ -19b+19c &=& 0 & L_2 \leftarrow 5L_2+3L_1\\ 19b-19c &=& 0 & L_3 \leftarrow 5L_3+2L_1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -5a+2b+3c &=& 0 & \\ -19b+19c &=& 0 & \textit{Pivot pour } b\\ 0 &=& 0 & L_3 \leftarrow L_3-L_2\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=c\\ a=c\end{array}\right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}c\\c\\c\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Par conséquent, le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ engendre D et ce vecteur étant non nul, il forme une base de D.

correction de l'exercice 2

1. En choisissant $A = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, on a $\forall X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad f(X) = AX$ donc l'application f est linéaire.

   ker(f) :

$$X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{2,1} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0\\ x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow X = 0_{2,1} \Rightarrow \ker(f) = \{0_{2,1}\}$$

   Im(f) : Soit $Y \in F = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur $Y = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ appartient à Im(f) ssi il existe un vecteur $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = f(X)$ (donc α, β sont donnés et l'on cherche l'existence de x, y)

$$Y = f(X) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = y\\ \beta = x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\beta\\ y=\alpha\end{array}\right.$$

   Par conséquent, le système $Y = f(X)$ admet au moins une solution (une en fait) sans aucune condition sur Y donc tout vecteur Y de $F = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ admet au moins un antécédent par f, ce qui signifie que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}).$$

2. En choisissant $A = \begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, on a $\forall X \in E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad f(X) = AX$ donc l'application f est linéaire.

   ker(f) :

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{2,1} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=0\\ x+y+z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x-y+z=0 & \textit{Pivot pour } x\\ 3y+z=0 & L_2 \leftarrow 2L_2-L_1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{3}z\\ x=-\dfrac{2}{3}z\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}z\\ -\frac{1}{3}z\\ z\end{pmatrix} = \frac{z}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \ker(f) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   Im(f) : Soit $Y \in F = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur $Y = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ appartient à Im(f) ssi il existe un vecteur $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = f(X)$ (donc α, β sont donnés et l'on cherche l'existence de x, y, z)

$$Y = f(X) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=\alpha\\ x+y+z=\beta\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x-y+z &=& \alpha & \textit{Pivot pour } x\\ 3y+z &=& 2\beta-\alpha & L_2 \leftarrow 2L_2-L_1\end{array}\right.$$

Par conséquent, le système $Y = f(X)$ admet au moins une solution (une infinité en fait) sans aucune condition sur Y donc tout vecteur Y de $F = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ admet au moins un antécédent par f, ce qui signifie que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

3. En choisissant $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\forall X \in E = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\quad f(X) = AX$ donc l'application f est linéaire.

   $\underline{\ker(f)}$:

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{2,1} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 0 \\ 2a + b = 0 \\ a - b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow X = 0_{2,1} \Rightarrow \ker(f) = \{0_{2,1}\}$$

   $\underline{\mathrm{Im}(f)}$: Soit $Y \in F = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ ssi il existe un vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = f(X)$ (donc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont donnés et l'on cherche l'existence de a, b)

$$Y = f(X) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = \alpha \\ 2a + b = \beta \\ a - b = \gamma \\ b = \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = \alpha \\ 4b = 2\beta - \alpha \\ b = \gamma - \alpha \\ b = \delta \end{cases} \begin{array}{l} \textit{Pivot pour } a \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = \alpha & \\ 4b = -\alpha + 2\beta & \textit{Pivot pour } b \\ 0 = -3\alpha - 2\beta + 4\gamma & L_3 \leftarrow 4L_3 - L_2 \\ 0 = \alpha - 2\beta + 4\delta & L_4 \leftarrow 4L_4 - L_2 \end{cases}$$

   Par conséquent, le système $Y = f(X)$ admet au moins une solution (une infinité en fait) si et seulement le vecteur $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ vérifie les conditions

$$\begin{cases} -3\alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + 4\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 & \textit{Pivot pour } \alpha \\ -8\beta + 4\gamma + 12\delta = 0 & L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \\ -2\beta + \gamma + 3\delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{2}\delta \\ \alpha = \gamma - \delta \end{cases} \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \gamma - \delta \\ \frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{2}\delta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y \in \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

   Je laisse au lecteur le soin de vérifier que ces deux vecteurs forment une famille libre de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ donc ces deux vecteurs forment une base de $\mathrm{Im}(f)$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

4. En choisissant $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, on a $\forall X \in E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\quad f(X) = AX$ donc l'application f est linéaire.

   $\underline{\ker(f)}$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{2,1} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 6z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 6z = 0 & \textit{Pivot pour } x \\ 5y + 33z = 0 & L_2 \leftarrow 5L_2 - 3L_1 \\ 38z = 0 & L_3 \leftarrow 5L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = 0_{3,1} \Rightarrow \ker(f) = \{0_{3,1}\}$$

<u>$\text{Im}(f)$</u> : Soit $Y \in F = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur $Y = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ appartient à $\text{Im}(f)$ ssi il existe un vecteur $X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = f(X)$ (donc α, β, γ sont donnés et l'on cherche l'existence de x, y, z)

$$Y = f(X) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 5x-6z &=& \alpha\\ 3x+y+3z &=& \beta\\ 3x+4z &=& \gamma\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 5x-6z &=& \alpha & \textit{Pivot pour } x\\ 5y+33z &=& -3\alpha+5\beta & L_2 \leftarrow 5L_2 - 3L_1\\ 38z &=& -3\alpha+5\gamma & L_3 \leftarrow 5L_3 - 3L_1\end{array}\right.$$

Par conséquent, le système $Y = f(X)$ admet au moins une solution (une seule en fait) sans aucune condition sur Y donc tout vecteur Y de $F = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet au moins un antécédent par f, ce qui signifie que

$$\text{Im}(f) = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

5. En choisissant $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, on a $\forall X \in E = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, $\quad f(X) = AX$ donc l'application f est linéaire.

<u>$\ker(f)$</u> :

$$X = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{3,1} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b-c+d &=& 0\\ 2a+c+2d &=& 0\\ a-b+2c+d &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} a+b-c+d &=& 0 & \textit{Pivot pour } a\\ -2b+3c &=& 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ -2b+3c &=& 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} a+b-c+d &=& 0 & \\ -2b+3c &=& 0 & \textit{Pivot pour } b\\ 0 &=& 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = \dfrac{3}{2}c\\ a = -\dfrac{1}{2}c - d\end{array}\right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}c - d\\ \dfrac{3}{2}c\\ c\\ d\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad X \in \text{Vect}\left[\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right] \Rightarrow \ker(f) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right]$$

Je laisse le lecteur vérifier que ces deux vecteurs forment une famille donc il s'agit d'une base de $\ker(f)$

<u>$\text{Im}(f)$</u> : Soit $Y \in F = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur $Y = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ appartient à $\text{Im}(f)$ ssi il existe un vecteur $X = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = f(X)$ (donc α, β, γ sont donnés et l'on cherche l'existence de a, b, c, d)

$$Y = f(X) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b-c+d &=& \alpha\\ 2a+c+2d &=& \beta\\ a-b+2c+d &=& \gamma\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} a+b-c+d &=& \alpha & \textit{Pivot pour } a\\ -2b+3c &=& -2\alpha+\beta & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ -2b+3c &=& -\alpha+\gamma & L_3 \leftarrow L_3 - L_1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} a+b-c+d &=& 0 & \\ -2b+3c &=& -2\alpha+\beta & \textit{Pivot pour } b\\ 0 &=& \alpha-\beta+\gamma & L_3 \leftarrow L_3 - L_2\end{array}\right.$$

Par conséquent, le système $Y = f(X)$ admet au moins une solution (une infinité en fait) si et seulement le vecteur $Y = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ vérifie les conditions

$$\alpha - \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta - \gamma \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix}\beta - \gamma\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow Y \in \text{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right]$$

Je laisse au lecteur le soin de vérifier que ces deux vecteurs forment une famille libre de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc ces deux vecteurs forment une base de $\text{Im}(f)$

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right]$$

6. On commence par réordonner les variables $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y+z+t \\ 2y+2z+3t \\ 2z+3t \\ 2t \end{pmatrix}$

   En choisissant $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $\forall X \in E = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \quad f(X) = AX$ donc l'application f est linéaire.

   $\underline{\ker(f)}$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{3,1} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y+z+t & = & 0 \\ 2y+2z+3t & = & 0 \\ 2z+3t & = & 0 \\ 2t & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t=0 \\ z=0 \\ y=0 \\ x=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow X = 0_{4,1} \Rightarrow \ker(f) = \{0_{4,1}\}$$

   $\underline{\mathrm{Im}(f)}$: Soit $Y \in F = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ ssi il existe un vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = f(X)$ (donc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont donnés et l'on cherche l'existence de a, b, c, d)

$$Y = f(X) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y+z+t & = & \alpha \\ 2y+2z+3t & = & \beta \\ 2z+3t & = & \gamma \\ 2t & = & \delta \end{array} \right.$$

   Par conséquent, le système $Y = f(X)$ admet au moins une solution (une seule en fait) sans aucune condition sur Y donc tout vecteur Y de $F = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ admet au moins un antécédent par f, ce qui signifie que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$$

7. En choisissant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $\forall X \in E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad f(X) = AX$ donc l'application f est linéaire.

   $\underline{\ker(f)}$:

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{4,1} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+2b+3c & = & 0 \\ 3a+b+2c & = & 0 \\ 2a+3b+c & = & 0 \\ a+b+c & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} a+2b+3c & = & 0 & \textit{Pivot pour } a \\ -5b-7c & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ -b-5c & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ -b-2c & = & 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} a+2b+3c & = & 0 & \\ -5b-7c & = & 0 & \textit{Pivot pour } b \\ -18c & = & 0 & L_3 \leftarrow 5L_3 - L_2 \\ -3c & = & 0 & L_4 \leftarrow 5L_4 - L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow X = 0_{3,1} \Rightarrow \ker(f) = \{0_{3,1}\}$$

   $\underline{\mathrm{Im}(f)}$: Soit $Y \in F = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ ssi il existe un vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = f(X)$ (donc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont donnés et l'on cherche l'existence de a, b, c)

$$Y = f(X) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+2b+3c & = & \alpha \\ 3a+b+2c & = & \beta \\ 2a+3b+c & = & \gamma \\ a+b+c & = & \delta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} a+2b+3c & = & \alpha & \textit{Pivot pour } a \\ -5b-7c & = & -3\alpha+\beta & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ -b-5c & = & -2\alpha+\gamma & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ -b-2c & = & -\alpha+\delta & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} a+2b+3c & = & \alpha & \\ -5b-7c & = & -3\alpha+\beta & \textit{Pivot pour } b \\ -18c & = & -7\alpha-\beta+5\gamma & L_3 \leftarrow 5L_3 - L_2 \\ -3c & = & -2\alpha-\beta+5\delta & L_4 \leftarrow 5L_4 - L_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} a+2b+3c & = & \alpha & \\ -5b-7c & = & -3\alpha+\beta & \\ -18c & = & -7\alpha-\beta+5\gamma & \textit{Pivot pour } c \\ 0 & = & -5\alpha-5\beta-5\gamma+30 & L_4 \leftarrow 6L_4 - L_3 \end{array} \right.$$

Par conséquent, le système $Y=f(X)$ admet au moins une solution (une infinité en fait) si et seulement le vecteur $Y=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix}$ vérifie les conditions

$$-5\alpha-5\beta-5\gamma+30\delta=0 \underset{\div(-5)}{\Leftrightarrow} \alpha+\beta+\gamma-6\delta=0 \Leftrightarrow \alpha=-\beta-\gamma+6\delta$$
$$\Leftrightarrow Y=\begin{pmatrix}-\beta-\gamma+6\delta\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}6\\0\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow Y\in \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

Je laisse au lecteur le soin de vérifier que ces trois vecteurs forment une famille libre de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ donc ces trois vecteurs forment une base de $\operatorname{Im}(f)$

$$\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

correction de l'exercice 3

1. Soient X, X' deux vecteurs de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et λ,μ deux réels

$$\begin{aligned}f(\lambda X+\mu X') &= A(\lambda X+\mu X')-(\lambda X+\mu X')B=\lambda AX+\mu AX'-\lambda XB-\mu X'B\\ &= \lambda(AX-XB)+\mu(AX'-X'B)=\lambda f(X)+\mu f(X')\end{aligned}$$

2. • Soit $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ alors

$$f(X)=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-a\\a&b-c\end{pmatrix}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}X &= \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\ker(f)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-a\\a&b-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-a=0\\a=0\\b-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=c\end{cases}\\ &\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}0&c\\c&d\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow X\in\operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]\\ &\Rightarrow \ker(f)=\operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]\end{aligned}$$

Je laisse au lecteur le soin de vérifier que ces deux vecteurs forment une famille libre de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ donc ces deux vecteurs forment une base de $\ker(f)$

• Soit $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ alors

$$f(X)=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5b+c&-a+b+d\\5a-c-5d&5b-c\end{pmatrix}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5b+c & -a+b+d \\ 5a-c-5d & 5b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -5b+c=0 \\ -a+b+d=0 \\ 5a-c-5d=0 \\ 5b-c=0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -a+b+d=0 \\ -5b+c=0 \\ 5a-c-5d=0 \\ 5b-c=0 \end{array} \right. \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -a+b+d=0 \\ -5b+c=0 \\ 5b-c=0 \\ 5b-c=0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \textit{Pivot pour } a \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -a+b+d=0 \\ -5b+c=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \textit{Pivot pour } b \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = \frac{1}{5}c \\ \\ a = \frac{1}{5}c + d \end{array} \right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}c+d & \frac{1}{5}c \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow \ker(f) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

Je laisse au lecteur le soin de vérifier que ces deux vecteurs forment une famille libre de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ donc ces deux vecteurs forment une base de $\ker(f)$

- Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors

$$f(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{pmatrix}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -b=0 \\ a-d=0 \\ b=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b=0 \\ a=d \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&\Rightarrow \ker(f) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

Je laisse au lecteur le soin de vérifier que ces deux vecteurs forment une famille libre de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ donc ces deux vecteurs forment une base de $\ker(f)$.