Exercice 1
Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

1. $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}\right)$ et $T_n = S_n + \frac{1}{2n^2}$
2. $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}\right)$ et $T_n = S_n + \frac{1}{3n^3}$
3. $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ et $T_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$.

   On commencera par montrer que $\forall x \geqslant 1, \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(1+\frac{1}{x}) \leqslant \frac{1}{x}$

Exercice 2
On pose $f(x,y) = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$.
Déterminer les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$$

Exercice 3
On considère la fonction alculer les dérivées partielles suivantes de la fonction $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$
Calculer les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Exercice 4
Calculer les dérivées partielles du premier ordre et du second ordre des fonctions suivantes

$$a : (x,y) \mapsto (x^2+y^2)e^{-xy} \qquad b : (x,y) \mapsto (x^2-y)(3x^2-y)$$
$$c : (x,y) \mapsto x^2+y^2+(3-x-y)^2 \qquad d : (x,y) \mapsto y^3 - 3x^2y$$

Exercice 5
Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions, définies sur l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad y > 0\}$,

$$e : (x,y) \mapsto x(\ln y)^2 + y^2 \qquad f : (x,y) \mapsto (\ln y)^2 + 2\ln y + x^2$$
$$g : (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x^2+y} \qquad h : (x,y) \mapsto \ln(1+\frac{y}{1+x^2})$$

Exercice 6
On considère la fonction $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Les points critiques obtenus précédemment sont-ils des extremas locaux ?

Exercice 7
On introduit la fonction $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4yx + 4x - 2y - 8$

1. Montrer que les points critiques de f forment une droite toute entière dont on donnera l'équation ainsi que la représentation graphique.
2. La fonction f possède-t-elle des extrémas locaux ?

Exercice 8
Déterminer, lorsqu'ils existent, les extrémas locaux des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} a(x,y) &= x[(\ln x)^2 + y^2] \quad (x>0) \quad b(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2) \\ c(x,y) &= 3xy - x^3 - y^3 \quad d(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \\ e(x,y) &= x^2 - x + xy^2 - xy \quad f(x,y) = \frac{1}{3}y^3 - y^2 + x^2y + x^3 - 3x^2 - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

La blague du matheux :
Une fonction constante et e^x marchent tranquillement dans la rue. Soudain la fonction constante aperçoit une dérivée qui approche et se sauve en courant....
e^x la rattrape et lui demande ce qui lui prend
La constante : " Tu ne te rends pas compte ! Si la dérivée me rencontre, il me dérivera et il ne restera rien de moi... !"
"Ah ! Ah!", dit e^x, "il ne m'inquiète pas, MOI, je suis e puissance x !", et il poursuit sa route.
Evidemment, au bout de quelques mètres, il rencontre la dérivée.
e^x : " Salut, je suis e^x !"
La dérivée : " Salut, moi je suis $\frac{\partial}{\partial y}$..."