Exercice 1
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules. Soit B le nombre de boules blanches et N le nombre de boules noires.

1. On suppose que les tirages sont sans remise.
   Déterminer la loi de B (resp. N) puis calculer $E(B), V(B)$ (resp. $E(N), V(N)$).
   Les variables B et N sont-elles indépendantes ?
2. Refaire les questions précédentes lorsque les tirages sont avec remise.

Exercice 2
Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce obtenir la première boule blanche. Soit B le nombre de tirages nécessaires.
   Expliciter la loi de B, son espérance et son écart-type.
2. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires.
   Expliciter la loi de X, son espérance et son écart-type.
3. Les variables B et X sont-elles indépendantes ?

Exercice 3
On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'a ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes. On note X la var "nombre de tirage effectués".
Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 4
Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases se cache une bouteille de Champagne. On fixe un entier $n \in [\![1, 25]\!]$ et on retourne n cases au hasard. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles découvertes.
Déterminer la loi de probabilité de X_n ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 5
On lance n fois consécutives une pièce. La probabilité d'obtenir "pile" est p et celle d'obtenir "face" est $q = 1 - p$.
Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

1. Donner la loi de X_2.
2. Donner la loi de X_3. Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.
3. Trouver la loi de X_4. Calculer $E(X_4)$.

Exercice 6
On tire simultanément r jetons d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($r \leqslant n$).
On note $X_{n,r}$ la var égale au maximum des r numéros obtenus.

1. Donner les lois des variables $X_{3,2}$, $X_{4,2}$, $X_{4,3}$, $X_{5,4}$.
2. Déterminer la loi de $X_{n,r}$ pour n et r quelconques avec $r \leqslant n$.
   En déduire la valeur de $\sum_{k=r}^{n} C_n^{r-1}$.

Exercice 7
On tire, avec remise, cinq boules d'une urne contenant dix boules numérotés de 1 à 10. On note X la var égale au maximum des deux numéros obtenus et Y la var égale au minimum des cinq numéros obtenus.

1. Déterminer soigneusement $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Calculer $P(X \leqslant k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et $P(Y \geqslant k)$ pour $k \in Y(\Omega)$.
   En déduire les lois de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8
n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Vérifier que $N(\Omega) = \{2, .., n+1\}$.
2. Démontrer que : $\forall k \in \{1, n\}$, $P(N \geqslant k+1) = \dfrac{A_n^k}{n^k}$.
3. En déduire $P(N = k)$ (on distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k = n+1$).
4. Montrer que l'espérance $E(N) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{A_n^k}{n^k}$.