Exercice 1
Montrer que les équations suivantes possède une solution dans l'intervalle I

(a) $I = [-1, 1]$, $x^{2005} - x^{2004} = 1$ (b) $I = [1, 10]$, $\ln x = \dfrac{x^2 - 5}{x + 2}$
(c) $I = [0, 1]$, $3x = 1 + \ln(2 + x^2)$ (d) $I = [\ln 2, 2\ln 2]$, $e^x = 2 + x$

Exercice 2
Montrer que l'équation $3 - 2x = e^x$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
Vérifier que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Est-ce que $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$?
Valeurs numériques : $e = 2.718 \pm 10^{-3}$, $e^{1/2} \simeq 1.648 \pm 10^{-3}$

Exercice 3
On note (E_n) l'équation $(E_n) : \dfrac{x^3}{x^2 + 1} = n$

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, l'équation (E_n) possède une unique solution, notée x_n, sur $\mathbb{R}$.
2. Quelle est la monotonie de la suite $(x_n)_n$?
3. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $n \leqslant x_n \leqslant n + 1$
4. En déduire la limite de la suite $(x_n)_n$ et donner son équivalent.

Exercice 4
On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Montrer que pour tout entier n, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$. On note x_n cette solution.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $x_n \geqslant 0$ puis déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_n$
4. Déterminer alors la limite de la suite $(x_n)_n$

Exercice 5
On considère la fonction $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que pour tout entier positif n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n.
3. Comparer x_n et x_{n+1}. En déduire la monotonie de la suite x_n.
4. Démontrer que $\ln(n - \ln n) \leqslant x_n \leqslant \ln n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{\ln n}$.

Exercice 6
Posons $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que, pour chaque entier $n \geqslant 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On note x_n cette racine.
2. Justifier que $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{2}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
3. En utilisant l'égalité $f_n(x_n) = 0$, , déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$.
En déduire un équivalent de x_n.
4. Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
5. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_n$.

Exercice 7
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :
$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
2. Calculer u_1 et u_2 et vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $u_n \in]0, \dfrac{2}{3}[$.
3. Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. En évaluant l'inégalité précédente en $x = u_n$, déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
Quelle est alors la monotonie de la suite (u_n) ?
5. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note λ sa limite.
6. A l'aide de la question 2., encadrer $(u_n)^n$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n$
En déduire la limite de $(4 - 9u_n^2)$ et expliciter λ.