Exercice 1
On considère le jeu suivant : le joueur paie 3 euros pour jouer. Ensuite, il lance trois dés équilibrés. Pour chaque "Pile" qu'il obtient, il gagne 2 euros
On désigne par X le nombre de "Pile" obtenus et par Y le gain (algébrique) du joueur.

1. Exprimer Y en fonction de X.
2. Donner la loi de X puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$. Le joueur est-il gagnant en moyenne ?
4. Expliciter la loi de Y.

Exercice 2
On tire, au hasard et sans remise, 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.
Soit X le nombre de rois obtenus

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Un jeu consiste à miser 2 euros et à recevoir $a > 0$ euros par roi obtenu.
   Soit G_X la variable aléatoire égale au gain en euro.
   (a) Exprimer G_X en fonction de X et de a et calculer l'espérance de G_X.
   (b) Pour quelles valeurs de a le jeu est-il favorable au joueur ?
   (c) Donner la loi de G_X.

Exercice 3
On dispose de deux dés :
un dé cubique D_1 comporte 1 face marquée 0, 3 faces marquées 2, 2 faces marquées 1.
un dé D_2 comportant 3 faces marquées 0, 2 faces marquées 1, 1 face marquée 2.

1. On lance le dé D_1 et on note X_1 le nombre obtenu.
   Déterminer la loi de X_1 son espérance, sa variance.
2. Mêmes questions pour X_2 le nombre obtenu en lançant le dé D_2.
3. On lance D_1 et D_2 simultanément,
   (a) Calculer l'espérance de $Z = X_1 + X_2$ et de $T = X_1 - X_2$
   (b) Déterminer la loi de Z, de T et de $R = X_1X_2$.

Exercice 4
Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et noires en nombres respectifs b_1, n_1, b_2, n_2 non nuls. On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard et on remet la boule obtenue dans son urne d'origine.
Si l'on obtient une boule blanche (resp. noire), le $2^{ème}$ tirage se fait dans U_1 (resp. U_2).
Au $i^{ème}$ tirage, si la boule obtenue est blanche (resp. noire), le $(i+1)^{ème}$ tirage se fait dans U_1 (resp. U_2).
On considère la variable aléatoire X_i définie par :
$X_i = 1$ si l'on obtient une boule blanche au $i^{ème}$ tirage et $X_i = 0$ sinon.

1. Donner la loi de X_1 puis de X_2.
2. Calculer $P(X_{i+1} = 0)$ en fonction de $P(X_i = 0)$ et $P(X_i = 1)$.
   Faire de même avec $P(X_{i+1} = 1)$.
3. Montrer que la suite $(P(X_i = 0))_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
   En déduire l'expression de $P(X_i = 0)$ en fonction de i puis celle de $P(X_i = 1)$.
4. Calculer $\lim\limits_{i\to+\infty} P(X_i = 0)$ et $\lim\limits_{i\to+\infty} P(X_i = 1)$. Interprétation du résultat.

Exercice 5
On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées $3, 4, 5$ et 6.
On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : $1, 3, 2, 3, 5$.
   Quel est le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance mathématique $E(X_1)$.
3. Déterminer la loi de X_2.
4. En général, quelles sont les valeurs possibles de X_n ?
5. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^\times$, on a :
   $P(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{6}P(X_n = 1), \quad P(X_{n+1} = 6) = \dfrac{1}{6}P(X_n = 5)$
   $\forall k \in \{1, .., 5\}, \quad P(X_{n+1} = k) = \dfrac{7-k}{6}P(X_n = k-1) + \dfrac{k+1}{6}P(X_n = k+1).$
6. En déduire que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^\times$: $E(X_{n+1}) = \dfrac{2}{3}E(X_n) + 1.$

   Calculer alors $E(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$.