Exercice 1
On considère la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}(4+u_n^2)$

1. Etude la fonction $f(x) = \frac{1}{5}(4+x^2)$.
   (a) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   En déduire que $f([0,1]) \subset [0,1]$ et $f(]4,+\infty[) \subset]4,+\infty[$.
   (b) Déterminer les points fixes de f.
   (c) Montrer que $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{2}{5}$.
2. On suppose dans cette question que $u_0 \in [0,1]$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \in [0,1]$.
   (b) Démontrer que $\forall n \geqslant 0, \quad |u_{n+1}-1| \leqslant \frac{2}{5}|u_n - 1|$
   (c) En déduire que $\forall n \geqslant 0, \quad |u_n - 1| \leqslant (\frac{2}{5})^n$.
   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   (e) Expliciter un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - 1| \leqslant 10^{-10}$.

Exercice 2
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2-u_n^2)$.

1. Soit $f : x \mapsto x + \frac{1}{4}(2-x^2)$.
   (a) Etudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
   (b) Montrer que $\forall x \in [1,2], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
   (c) Montrer que $f([1,2]) \subset [1,2]$.
2. Convergence de la suite.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et conclure.
   (d) A partir de quel rang a-t-on : $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$?

Exercice 3
Soit u la suite définie par $u_0 \in [3;4]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4 - \frac{\ln u_n}{4}$.

1. Soit $f(x) = 4 - \frac{\ln x}{4}$.
   Données numériques : $f(4) \simeq 3.65 \pm 10^{-2}$ et $f(3) \simeq 3.72 \pm 10^{-2}$
   (a) Etudier la fonction f et montrer que l'intervalle $[3;4]$ est stable par f.
   (b) Montrer que f possède un unique point fixe L sur l'intervalle $[3;4]$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in [3;4], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{10}$.
2. Convergence de la suite :
   (a) Vérifier que $\forall n \geqslant 0, \quad |u_{n+1} - L| \leqslant \frac{1}{10}|u_n - L|$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - L| \leqslant \frac{1}{10^n}|u_0 - L|$.
   (c) En déduire le plus petit entier n tel que $|u_n - L| \leqslant 10^{-4}$.

Exercice 4

1. Montrer que l'équation $\ln(-x^2+x+2) = x$ admet une et une seule solution de $[0,1]$.
   On note α cette unique solution.
   On souhaite désormais obtenir une valeur approchée à 10^{-9} près de α
2. Etude d'une fonction : Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(-x^2+x+2)$
   (a) Montrer que f est de classe C^2 sur $[0,1]$.
   (b) Vérifier que $\forall x \in |0,1]$, on a : $f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}$.
   (c) En déduire que $\forall x \in [0,1], \quad -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
   (d) Montrer que le segment $[0,1]$ est stable par f.
3. Etude d'une suite : On considère la suite u définie par
   $$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \ln(-(u_n)^2 + u_n + 2)$$
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in [0,1]$
   (b) Justifier que $\forall n \geqslant 0, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
   (c) En déduire que $\forall n \geqslant 0, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$
   (d) Quelle est la limite de la suite u ?
   (e) Quelle valeur choisir pour N pour que u_N soit une valeur approchée de α à 10^{-8} près ?