Exercice 1
On recherche déterminer une valeur approchée de l'unique solution négative de l'équation

$$(E) : e^x = 3 + 2x$$

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Justifier que $-2 \leqslant \alpha \leqslant -1$ puis que α vérifie également $\alpha = \dfrac{e^\alpha - 3}{2}$
2. On considère la suite u définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n} - 3}{2}$ ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 3}{2}$.
   (a) Justifier que $f(]-\infty, 0]) \subset]-\infty, 0]$ et que $\forall x \in]-\infty, 0], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 0$
   (c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} |u_n - \alpha|$ et $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
   (d) En déduire que la suite u converge vers α.
   (e) Comment choisir n pour que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-9}$?
   En déduire une valeur approchée à 10^{-9} près de α.

Exercice 2
On souhaite déterminer une approximation de l'unique solution strictement positive de l'équation $x = 2 - 2e^{-x}$.

1. Montrer que l'équation $x = 2 - 2e^{-x}$ admet deux solutions réelles dont l'une, notée r, est strictement positive. Vérifier que l'on a : $1.2 \leqslant r \leqslant 2$.
   Données numériques : $2e^{-1.2} \simeq 0.60 \pm 10^{-2}$
2. On considère la suite u définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2(1 - \exp(-u_n))$
   On introduit également la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2(1 - \exp(-x))$
   (a) Justifier que $[1, r]$ est stable par f et déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $[1, r]$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1, r]$ et donner la monotonie de u.
   (c) Justifier que la suite u converge vers r
3. Détermination d'une valeur approchée de r.
   (a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{2}{e} |u_n - r|$
   (b) En déduire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - r| \leqslant (\dfrac{2}{e})^n$
   (c) Comment choisir n pour que $|u_n - r| \leqslant 10^{-9}$?
   En déduire une valeur approchée à 10^{-9} près de r.

Exercice 3
Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{3}{x})$ et u la suite définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1. Etudier les variations de f et justifier que $1 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 2$ (sans calculatrice !!)
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \sqrt{3}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{3}\right| \leqslant \dfrac{1}{2} \left|u_n - \sqrt{3}\right|$ puis que $\left|u_n - \sqrt{3}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
4. En déduire la convergence de la suite u et donner sa limite.
5. On suppose ici $a = 1$. Comment choisir n pour que $\left|u_n - \sqrt{3}\right| \leqslant 10^{-9}$?
   En déduire une valeur approchée à 10^{-9} près de $\sqrt{3}$.

Exercice 4
On souhaite déterminer le nombre de solutions à l'équation $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$ ainsi qu'une valeur approchée d'une des racines.

1. Montrer que l'équation (E) admet trois solutions réelles α, β et γ telles que $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$
2. Obtention d'approximation de β.
   (a) Justifier que $\beta \in [0, \dfrac{1}{2}]$ et montrer que β est aussi solution de l'équation $\dfrac{x^3 + 1}{3} = x$
   (b) On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{3}$.
   Montrer que l'intervalle $[0, \dfrac{1}{2}]$ est stable par g et que $\forall x \in [0, \dfrac{1}{2}], \quad |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   On considère alors la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, \dfrac{1}{2}]$
   (d) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4} |u_n - \beta|$ puisque $|u_n - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4^n} \times \dfrac{1}{2}$.
   (e) Pour quelles valeurs de n est-on certain que $|u_n - \beta| \leqslant 10^{-9}$?
   En déduire une valeur approchée à 10^{-9} près de β.