Exercice 1
Les systèmes suivant sont-ils solubles. Si oui, expliciter les solutions :

1) $\begin{cases} 2x+y+z=-5 \\ 2x+13y-7z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+2y+2z=1 \\ 4x-y+3z=-1 \\ 2x+5y+z=1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+2y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+3y-z+t=1 \\ 2x+13y-7z+2t=2 \\ x-y+z+t=0 \\ x+7y-4z+t=-1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y+z+t=-1 \\ x+z+t=0 \\ x+y+t=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x+y+z+t=-5 \\ 2x+3y-3z+t=-1 \\ x-y+z-t=1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} u+w=1 \\ v+w=0 \\ u+v=12 \\ u+3v=0 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x+y-t=1 \\ -x+y+z=0 \\ -y+z+t=0 \\ x-z+t=1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x+y+z-3t=1 \\ -3x+y+z+t=-1 \\ x-3y+z+t=-1 \\ x+y-3z+t=1 \end{cases}$

Exercice 2
Déterminer toutes les matrices $B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3
Soit $a \in \mathbb{R}^\times$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 4
On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer J^2, J^3 et J^4. Que peut-on en déduire de J^k pour $k \geqslant 4$?
2. Développer algébriquement l'expression $(I+J)(I-J+J^2-J^3)$.
3. En déduire que la matrice $(I+J)$ est inversible et expliciter son inverse.

Exercice 5
1. Pour tout réel a, on définit la matrice $N(a)$ par $N(a) = \begin{pmatrix} a+1 & -a & -a \\ a & -a+1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   Soient a et b deux réels. Déterminer le réel c tel que $N(a)N(b) = N(c)$. A quelle condition sur c a-t-on $N(c) = I_3$? En déduire les conditions sur a pour que $N(a)$ soit inversible et expliciter le cas échéant $[N(a)]^{-1}$
2. Pour tous réels a, b, on définit la matrice $M(a,b)$ par $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
   Soient a, b, c, d quatre réels, déterminer les réels α et β pour que :
   $$M(a,b) + M(c,d) = M(\alpha,\beta) \quad M(a,b)M(c,d) = M(\alpha,\beta)$$
   Calculer $M(a,b)M(a,-b)$. A quelles conditions la matrice $M(a,b)$ est inversible. Expliciter le cas échéant la matrice inverse $[M(a,b)]^{-1}$

Exercice 6
On considère les matrices P et Q définies par :
$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
Pour tous réels a et b, on définit la matrice $M(a,b)$ par $M(a,b) = aP + bQ$.

1. Calculer P^2, Q^2, PQ, QP
2. Soient a, b, c, d quatre réels. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $M(a,b) = I_3$?
   Déterminer, pour chacune des égalités suivantes, les réels α et β pour que l'on ait : $M(a,b) + M(c,d) = M(\alpha,\beta)$ $M(a,b)M(c,d) = M(\alpha,\beta)$
   En déduire que si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, la matrice $M(a,b)$ est inversible et calculer son inverse $[M(a,b)]^{-1}$.

Exercice 7
Résoudre par rapport à x, y, z le système (S) : $\begin{cases} x-y+z=a \\ x+2y+z=b \\ x+y+2z=c \end{cases}$

En déduire que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 8
Déterminer parmi les matrices suivantes, les matrices inversibles et le cas échéant déterminer son inverse.
On procédera pour chaque matrice par deux méthodes : d'abord à l'aide des systèmes puis par opérations élémentaires sur les matrices.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$