Exercice 1
Dans un jeu, il y a n numéros (de 1 à n) dont p numéros gagnants choisis à l'avance et connus du seul meneur de jeu. On suppose $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $p \in \mathbb{N}^{\times}$, $p \leqslant \frac{n}{3}$.
Dans la première phase du jeu, le joueur tire au hasard, successivement, p numéros différents. Le meneur dévoile alors p numéros perdants parmi les $n-p$ numéros qui n'ont pas été tirés.
Dans la deuxième phase du jeu, le joueur a le choix entre deux stratégies.
Stratégie A : il garde les p numéros qu'il a tirés.
Stratégie B : il échange les p numéros qu'il a tirés contre p nouveaux numéros tirés au hasard, successivement, parmi les $n-2p$ numéros qui n'ont été ni tirés, ni dévoilés durant la première phase.
Le but de l'exercice est de déterminer laquelle des deux stratégies permet d'espérer obtenir le plus de numéros gagnants.

1. **Etude de la stratégie A** : On note X la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la première phase.
   Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.
   En déduire les formules (1) : $\sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k} = \binom{n}{p}$ (2) : $\sum\limits_{k=0}^{p} k\binom{k}{p}\binom{n-p}{p-k} = \frac{p^2}{n}\binom{n}{p}$
2. **Etude de la stratégie B** :
   Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on note Z_i la variable aléatoire égale à 1 si le $i^{ième}$ numéro tiré dans la deuxième phase est gagnant, 0 sinon.
   On note Z la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la deuxième phase.
   (a) Soient $k \in [\![0,p]\!]$ et $i \in [\![1,p]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(Z_i = 1)$.
   (b) Pour $1 \leqslant i \leqslant p$ démontrer que : $P(Z_i = 1) = \dfrac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}} \sum\limits_{k=0}^{p} (p-k)\binom{k}{p}\binom{n-p}{p-k}$
   (c) Quelle est la relation liant Z et les variables $(Z_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$? En déduire que : $E(Z) = \dfrac{p^2(n-p)}{n(n-2p)}$.
3. Des stratégies A et B, laquelle est préférable ?

Exercice 2
Un joueur lance une pièce équilibrée autant de fois que nécessaire . On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents (On peut appeler X_N le " nombre de changements " au cours des N premiers lancers).
Par exemple , si les 9 premiers lancers ont donné successivement : Pile , Pile , Face , Pile , Face , Face , Face , Pile , Pile alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux $3^{ième}$, $4^{ième}$, $5^{ième}$ et $8^{ième}$ lancers).

1. Justifier que $X_N(\Omega) = \{0, ..., N-1\}$.
2. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.
3. Montrer que $P(X_N = 0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N}$.
4. (a) Justifier que pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$: $P_{(X_N=k)}(X_{N+1} = k) = \dfrac{1}{2}$
   (b) En déduire que pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$ $P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = \dfrac{1}{2}P(X_N = k)$.
   (c) En sommant cette relation de $k = 0$ à $N-1$, montrer que $P(X_{N+1} - X_N = 0) = \dfrac{1}{2}$.
   (d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   En déduire la relation $E(X_{N+1}) = \dfrac{1}{2} + E(X_N)$, puis donner $E(X_N)$ en fonction de N.

5. (a) Montrer grâce aux résultats 4(b) et 4(c) que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.
   (b) En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binômiale $B(N-1, \frac{1}{2})$.
   En déduire la variance $V(X_N)$.

Exercice 3

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geqslant 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p appartenant à $]0,1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est q, avec $q = 1 - p$.

1. Soit X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels. Quelle est la loi de X ? Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

2. Après ces n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   (b) Calculer $p_0 = P(Z = 0)$, $p_1 = P(Z = 1)$. Montrer que $p_1 = npq^{2n-2}(1+q)$.
   (c) Calculer la probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(Y = h)$ pour $k \in \{0,..,n\}$ et $h \in \{0,..,n-k\}$.
   (d) Démontrer $P(Z = s) = \sum\limits_{k=0}^{s} P((X = k) \cap (Y = s-k))$.
   (e) Calculer $p_s = P(Z = s)$, vérifier que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} = \binom{n}{s}\binom{s}{k}$. En déduire que $p_s = C_n^s[p(1+q)]^s(q^2)^{n-s}$
   (f) Montrer que $p(1+q) = 1 - q^2$ et reconnaitre la loi suivie par Z

Exercice 4

On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans U_n . On note k le numéro de cette boule. Si k est égal à 1, on arrête les tirages. Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne. On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. Quelle est la loi de I_n? Calculer la probabilité conditionnelle $P_{(I_n=1)}(X_n = k)$

2. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer : $\forall j \in \mathbb{N}^{\times}, \forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \quad P_{(I_n=k)}(X_n = j) = P(X_{k-1} = j-1)$

3. (a) Quelle est la loi de X_1 ?
   (b) Quel est l'événement $(X_2 = 1)$? Donner la loi de X_2 , son espérance et sa variance.
   (c) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{(I_3=1)}(X_3 = 2)$, $P_{(I_3=2)}(X_3 = 2)$, $P_{(I_3=3)}(X_3 = 2)$.
   Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

4. (a) Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, ..., n\}$.
   (b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$
   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation : $\forall j \geqslant 2, \quad P(X_n = j) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1)$
   (d) Si n est supérieur ou égal à 2 et j supérieur ou égal à 2, calculer : $nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j)$
   En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :
$$\forall j \geqslant 1, P(X_n = j) = \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1)$$

5. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant 4.d) : $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$.
   En déduire l'expression de $E(X_n)$ (on sommera sur $k \in [\![2, n]\!]$ l'égalité $E(X_k) - E(X_{k-1}) = \frac{1}{k}$)