Exercice 1
Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :

$I_1 = \int_{-1}^{1} (t+1)(t+2)^2 dt$, $I_2 = \int_0^4 \sqrt{x}\,(x-2\sqrt{x})\,dx$, $I_3 = \int_1^2 3^u du$, $I_4 = \int_1^4 \frac{1}{y\sqrt{y}} dy$,

$I_5 = \int_0^1 (2z-1)\exp(z^2-z)dz$, $I_6 = \int_1^2 \frac{a^2}{\sqrt{1+a^3}} da$, $I_7 = \int_1^2 \frac{2\sqrt{c}}{2+3c^{3/2}} dc$,

$I_8 = \int_1^e \frac{(\ln b)^5}{b} db$, $I_9 = \int_0^{(\ln 2)/2} \frac{e^{2t}}{e^{2t}+2} dt$, $I_{10} = \int_e^{e^3} \frac{\ln(3\gamma)}{\gamma} d\gamma$, $I_{11} = \int_0^2 \beta^4 \exp(-\beta^5) d\beta$,

$I_{12} = \int_{1/2}^{3/2} \frac{1-\alpha}{(\alpha^2-2\alpha)^4} d\alpha$, $I_{13} = \int_0^2 x^2(x^3+1)^{3/2} dx$, $I_{14} = \int_0^1 \frac{s^{2004}}{(1+s^{2005})^{2006}} ds$,

$I_{15} = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{\zeta}}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta$, $I_{16} = \int_{-4}^4 \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} du$, $I_{17} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(-3/v^2)}{v^3} dv$, $I_{18} = \int_0^1 \frac{y^4}{\sqrt[3]{1+7y^5}} dy$

Exercice 2
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties :

$A = \int_{-1}^1 xe^{3x} dx$, $B = \int_0^1 (t^2+t)e^{2t} dt$, $C_n = \int_1^e u^n \ln(u) du$, $D = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln(v)}{v} dv$,

$E = \int_1^4 \sqrt{3s}\ln s\,ds$, $F = \int_0^1 \frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)^3} dt$, $G = \int_1^{e^2} (2x^3+1)\ln(x) dx$, $H = \int_0^1 y^4 e^y dy$,

$I = \int_1^e z^2 (\ln z)^3 dz$, $J = \int_0^1 (3x+1)^3 \ln(3x+1) dx$, $K = \int_1^e \ln y\, dy$,

$L = \int_1^2 \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) dt$, $M = \int_1^2 (1+2s)\ln\left(1+\frac{1}{s}\right) ds$, $N = \int_0^{1/2} (1-2x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

Exercice 3
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$. Calculer l'intégrale $I(a) = \int_a^{1/a} \frac{\ln x}{x} dx$

a) par intégration par partie b) en posant le changement de variable $x = 1/t$

Exercice 4
A l'aide de changement de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^1 w\sqrt{3w+1} dw$ $(z = 3w+1)$, $B = \int_1^e \frac{\ln t}{t} dt$ $(x = \ln t)$, $C = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ $(v = e^x)$,

Pour E et C, utiliser : $1/[\alpha(\alpha-1)] = 1/(\alpha-1) - 1/\alpha$ et $1/[\alpha(\alpha+1)] = 1/\alpha - 1/(\alpha+1)$

$D = \int_{1/2}^1 \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ $\left(t = \frac{x}{x+1}\right)$, $E = \int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)}$ $(\alpha = s^3+1)$,

$F = \int_{-1}^0 \frac{u^3 du}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}}$ $(v = u^2+1)$, $G = \int_0^3 \frac{t.\ln(t^2+1)}{t^2+1} dt$ $(x = t^2+1)$

Exercice 5
Développer les expressions suivantes $(x+1)^n$, $(x-1)^n$, puis en intégrant sur $[0,1]$, obtenir : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$, $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{(-1)^n}{n+1}$

Exercice 6
On pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$. Vérifier : $\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ puis calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 7
On pose $I_n = \int_2^n \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$. Montrer que $\forall x \in]1,+\infty[$, $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{1}{x-1}$.

En déduire que $\forall n \geqslant 2$, $\ln n - \ln 2 \leqslant I_n \leqslant \ln(n-1)$. Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\ln n}$.

Exercice 8
Etudier la monotonie des suites suivantes ($n \in \mathbb{N}^\times$).

$a_n = \int_0^n \exp(-t^2)dt$, $b_n = \int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$, $c_n = \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^3} dx$ $d_n = \int_1^n (1-x)^3 e^x dx$,

$e_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$, $f_n = \int_1^2 (\ln t)^n dt$, $g_n = \int_0^1 x\exp(-n^2 x)dx$, $h_n = \int_{-1}^0 x\exp(n^2 x)dx$,

$i_n = \int_1^{1/n} (\ln y)^3 dy$, $j_n = \int_1^2 \frac{u^{1/n}}{1+u} du$, $k_n = \int_0^1 \frac{u}{1+u^n} du$, $l_n = \int_1^{\ln n} \frac{t}{1-\exp(t)} dt$

Exercice 9
Vérifier que les suites suivantes sont bien des sommes de Riemann puis calculer leurs limites (en justifiant l'existence de cette limite)

$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3}$, $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$, $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$, $d_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k^2+n^2}$

Exercice 10
1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $A_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{n^{\alpha+1}}$ puis un équivalent de A_n.
2. On pose $B_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(n+k)^3}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} B_n$.