Exercice 1

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n(n-1)}{5^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{5^n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n^2+5n}{5^n}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{3^n}$,e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{3^n}$,
f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}$ g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$, h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{4(-1)^{n+1}}{n!}$, i) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n2^n}{n!}$, j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{(n+1)!}$

Exercice 2

On considère deux variables X et Y telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^\times$ et
$\forall i, j \in \mathbb{N}^\times, \quad P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$.

1. Donner les lois de X et de Y.
2. Montrer que X et Y admettent des espérances et expliciter $E(X)$ et $E(Y)$.
3. Justifier que la variable $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.
   En déduire $V(X)$. Procéder de même avec Y.
4. Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, montrer que X et Y sont dépendantes (utiliser $P(X = 1 \cap Y = 1)$)
5. Montrer que X et Y sont indépendantes lorsque $p = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3

Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p \in]0,1[$. On effectue des tirages successifs avec remise.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 1-ère boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 2-ième boule blanche.
   Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.
3. Soit X_r la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la r-ième boule blanche ainsi que la variable aléatoire $Y_r = X_{r+1} - X_r$.
   (a) Que représente la variable Y_r ? En déduire sa loi et son espérance.
   (b) Montrer, par récurrence, que la variable X_r admet une espérance.
   (c) Justifier que la suite $(E(X_r))_{r\in\mathbb{N}^\times}$ est arithmétique.
   Expliciter alors $E(X_r)$ en fonction de r.
4. Détermination de la loi de X_r.
   (a) Donner l'univers de X_r.
   (b) Pour $r \in \mathbb{N}^\times$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $r \leqslant k$, on considère les évènements
   A_k : "obtenir $r-1$ boules blanches aux $k-1$ premiers pioches ",
   B_k "obtenir une boule blanche à la k-ième pioche ".
   Comparer l'évènement $A_k \cap B_k$ et $(X_r = k)$. En déduire la loi de X_r.

Exercice 4

Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet $n°1$.

1. Calculer $P_{(N=n)}(X = k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. Justifier que $P(X = k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X = k) P(N = n)$
3. Montrer que $P(X = k) = e^{-\lambda}(\dfrac{1}{m})^k \dfrac{\lambda^k}{k!} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \left(\lambda\left(1 - \dfrac{1}{m}\right)\right)^n$.
4. En déduire la loi de probabilité de X (on retrouvera une loi usuelle)
5. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 5

On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre λ. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres.
La probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à t.
On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :
N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés; X est la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés; Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état. On a donc : $X + Y = N$.

1. Calculer, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle suivante : $P_{(N=n)}(X = k)$.
2. En déduire que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.
3. En suivant une méthode similaire à X, déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles, à priori et sans calcul, indépendantes ?
5. Calculer la probabilité $P((X = k) \cap (Y = q))$ et $P(X = k)P(Y = q)$. Conclusion