Exercice 1
Parmi les espaces suivants, quels sont ceux qui sont des espaces vectoriels ?

1. $A = \{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $a + b = 1\}$.
2. $B = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $2a - 5b + c = 0 \quad \text{et} \quad b + c = 0\}$
3. $C = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $\alpha + \gamma - 2\delta = -1 \quad \text{et} \quad 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0\}$
4. $D = \{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $a^2 + b = 0\}$.
5. $E = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $a - 2b - 3c - 4d = 0\}$.
6. $F = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ b - 2a + c = 0 \\ c - 2b + a = 0 \end{cases}\}$.
7. $G = \{X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 3X\}$.
8. $H = \{X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 4X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.
9. $K = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = X\}$.

Exercice 2
On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont combinaison linéaire de e_1 et e_2.
2. Parmi les vecteurs suivants, repérer ceux qui sont combinaison linéaire de e_1 et e_2 puis expliciter la combinaison linéaire correspondante.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 3
On considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que tout vecteur X de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3.
2. Est-ce le cas si l'on considère seulement la famille e_1, e_2 ?
3. Est-ce le cas si l'on remplace e_3 par le vecteur $\widetilde{e_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$?
4. Est-ce le cas si l'on choisit la famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$?

Exercice 4
Déterminer, parmi les familles suivantes, celles qui sont des bases de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{B}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},\ \mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},\ \mathcal{B}_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathcal{B}_4 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\},\ \mathcal{B}_5 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 5
On considère l'ensemble $F = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} X = 2X\}$

1. Montrer que est un espace vectoriel.
2. Donner une famille génératrice.
3. Cette famille génératrice est-elle une base de F ?