correction de l'exercice 1
La fonction f est continue (resp. dérivable) sur $\mathbb{R}$ tout entier comme le quotient de deux fonctions continues (resp. dérivables) sur $\mathbb{R}$ tout entier et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (comme somme de deux réels strictement positifs).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - e^{-x})'(e^{-x}+e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{(e^{2x}+2+e^{-2x}) - (e^{2x}-2+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} > 0 \text{ sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$.
En effet, les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ sont données par :

$$\begin{aligned} \text{en } +\infty &: f(x) = \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} \frac{1}{1} = 1 \\ \text{en } -\infty &: f(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \underset{x\to-\infty}{\rightarrow} \frac{-1}{1} = -1 \end{aligned}$$

correction de l'exercice 2
On introduit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$ et l'équation $\dfrac{x^3}{x^2+1} = 1$ est équivalente à l'équation $f(x) = 1$, autrement dit à la justification de l'existence et l'unicité de l'antécédent de 1 par f sur $\mathbb{R}$.
Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le quotient de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (comme somme d'un terme positif et d'un terme strictement positif).

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

Par conséquent, la fonction f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
En effet, les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ sont données par

$$\text{en } \pm\infty : f(x) = \frac{x^3}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{x^3}{x^2} \times \frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \underbrace{x}_{\to\pm\infty} \times \underbrace{\boxed{\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}}}_{\to 1} \underset{x\to\pm\infty}{\rightarrow} \pm\infty$$

Puisque $1 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 1 \Leftrightarrow$ admet une et une solution sur $\mathbb{R}$ (existence et unicité de l'antécédent de 1 par f sur $\mathbb{R}$)
Pour l'encadrement de α, on compare les images $f(0)$, $f(\alpha)$, $f(1)$.

$$f(0) = 0 \quad f(\alpha) = 1 \ (\alpha \text{ est solution de l'équation } f(x) = 1) \quad f(2) = \frac{8}{5}$$

On en déduit que $f(0) \leqslant f(\alpha) \leqslant f(2)$ et, la fonction f étant bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on est en droit d'affirmer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

correction de l'exercice 3
On introduit la fonction $f : x \mapsto 3 - 2x - e^x$ et l'équation $3 - 2x = e^x$ est équivalente à l'équation $f(x) = 0$, autrement dit à la justification de l'existence et l'unicité de l'antécédent de 0 par f sur $\mathbb{R}$.
Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ comme la somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. La fonction f étant la somme de deux fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}$ ($x \mapsto 3 - 2x$ et $x \mapsto -e^x$), on en déduit qu'elle est également strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Les deux conditions du théorème de bijection étant remplies, on en déduit que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. En effet, les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ sont données par

$$\begin{aligned} \text{en } +\infty &: f(x) = \underbrace{-e^x}_{\to-\infty}(\underbrace{3e^{-x}}_{\to 0} - \underbrace{2xe^{-x}}_{\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0} + 1) \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} -\infty \\ \text{en } -\infty &: f(x) = \underbrace{3-2x}_{\to+\infty} - \underbrace{e^x}_{\to 0} \underset{x\to-\infty}{\rightarrow} +\infty \end{aligned}$$

Puisque $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ admet une et une solution sur $\mathbb{R}$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f sur $\mathbb{R}$)
Pour l'encadrement de α, on compare les images $f(0)$, $f(\alpha)$, $f(1)$.

$$f(0) = 2 \quad f(\alpha) = 0 \ (\alpha \text{ est solution de l'équation } f(x) = 0) \quad f(1) = 1 - e$$

On en déduit que $f(1) \leqslant f(\alpha) \leqslant f(0)$ et, la fonction f étant bijective et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on est en droit d'affirmer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
Pour le second encadrement, il suffit simplement de voir si $\frac{1}{2} \leqslant \alpha$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - e^{1/2} < 0 \quad f(\alpha) = 0 \text{ (}\alpha\text{ est solution de l'équation } f(x) = 0\text{)}$$

On en déduit que $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(\alpha)$ et, la fonction f étant bijective et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on est en droit d'affirmer que $\alpha < \frac{1}{2}$ donc on est assuré que l'on a pas l'encadrement $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

correction de l'exercice 4

1. La fonction f est continue (resp. strictement croissante) sur $\mathbb{R}_+^\times$ comme somme de deux fonctions continues (resp. strictement croissante) sur $\mathbb{R}_+^\times$. Par conséquent, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $f(\mathbb{R}_+^\times) = \mathbb{R}$. En effet, les limites de f en 0^+ et en $+\infty$ sont données par

$$\text{en } +\infty : f(x) = x + \ln x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty \qquad \text{en } 0^+ : f(x) = \underbrace{x}_{\to 0} + \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} \underset{x\to-\infty}{\to} -\infty$$

2. L'équation $x + \ln x = 2005$ est équivalente à l'équation $f(x) = 2005$. Etant donné que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}$ et que $2005 \in f(\mathbb{R}_+^\times) = \mathbb{R}$, on est assuré que l'équation $f(x) = 2005$ admet une et une seule solution α sur $]0, +\infty[$ (existence et unicité de l'antécédent de 2005 par f sur $\mathbb{R}$).
Pour l'encadrement, il suffit de comparer les images

$$f(1997) \simeq 2004.6 \quad f(\alpha) = 2005 \text{ (car } \alpha \text{ est solution de } f(x) = 2005\text{)} \quad f(2005) = 1998 + \ln 1998 \simeq 2005.6$$

On en déduit que $f(1997) \leqslant f(\alpha) \leqslant f(1998)$ et, la fonction f étant bijective et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on est en droit d'affirmer que $1997 \leqslant \alpha \leqslant 1998$.
Valeurs numériques : $\ln 1997 \simeq \ln 1998 \simeq 7.6 \pm 10^{-1}$.

correction de l'exercice 5

$\boxed{(E_1)}$: On introduit la fonction $a : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x$. L'équation (E_1) est équivalente à l'équation $a(x) = 1$.
La fonction f est clairement continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme)

$$a'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$$

Les racines du trinôme $x \mapsto x^2 - x - 2$ sont -1 et 2, ce qui nous donne le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$a'(x)$		$+$		$-$		$+$	
			7				$+\infty$
$a(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-20		

La fonction a réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, -1[$ (resp. $]-1, 2[$, resp. $]2, +\infty[$) sur l'intervalle $]-\infty, 7[$ (resp. $]-20; 7[$, resp. $]-20, +\infty[$). Puisque $1 \in]-\infty, 7[$ (resp. $]-20; 7[$, resp. $]-20, +\infty[$), on en déduit que l'équation $a(x) = 1$ admet une et une seule solution sur l'intervalle $]-\infty, -1[$ (resp. $]-1, 2[$, resp. $]2, +\infty[$) (existence et unicité de l'antécédent de 1 par f sur $]-\infty, -1[$ (resp. $]-1, 2[$, resp. $]2, +\infty[$)).
Pour finir, les réels -1 et 2 n'étant clairement pas solutions de cette équation, on en déduit que l'équation $a(x) = 1$ admet trois solutions, l'une appartenant à l'intervalle $]-\infty, -1[$, l'autre à l'intervalle $]-1, 2[$ et la dernière à l'intervalle $]2, +\infty[$.
$\boxed{(E_2)}$: On introduit la fonction $b : x \mapsto 12x^5 - 45x^4 + 40x^3$. L'équation (E_2) est équivalente à l'équation $b(x) = 8$.
La fonction f est clairement continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme)

$$b'(x) = 60x^4 - 180x^3 + 120x^2 = 60x^2(x^2 - 3x + 2)$$

Le signe de $b'(x)$ étant clairement du signe du trinôme $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ et les racines de ce dernier étant 1 et 2, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$b'(x)$		$+$		$-$		$+$	
			7				$+\infty$
$a(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-16		

La fonction a réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty,1[$ (resp. $]1,2[$, resp. $]2,+\infty[$) sur l'intervalle $]-\infty,7[$ (resp. $]-16;7[$, resp. $]-16,+\infty[$). Puisque $8\notin]-\infty,7[$ (resp. $8\notin]-16;7[$), on en déduit que l'équation $b(x)=8$ n'admet pas de solution sur les intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,2[$. D'autre part, puisque $8\in]-16,+\infty[$, on en déduit que l'équation $b(x)=8$ admet une et une seule solution sur l'intervalle $]2,+\infty[$ (existence et unicité de l'antécédent de 8 par b appartenant à $]2,+\infty[$).
Pour finir, les réels 1 et 2 n'étant clairement pas solutions de cette équation, on en déduit que l'équation $b(x)=8$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$ et que cette solution appartient à $]2,+\infty[$.

correction de l'exercice 6

Cas de la fonction a :

$$\frac{\partial a}{\partial x}(x,y)=-2xy+4x^3 \qquad \frac{\partial a}{\partial y}=2y-x^2 \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-2xy+4x^3\right)=-2y+12x^2$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2y-x^2\right)=-2x \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2y-x^2\right)=2$$

Cas de la fonction b :

$$\frac{\partial b}{\partial x}(x,y)=-2xy \qquad \frac{\partial b}{\partial y}=-x^2+3y^2 \qquad \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-2xy\right)=-2y$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2+3y^2\right)=-2x \qquad \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^2+3y^2\right)=6y$$

Cas de la fonction c :

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial c}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Cas de la fonction d :

$$\frac{\partial d}{\partial x}(x,y)=e^{-xy}\left(2x-y^3-x^2y\right) \qquad \frac{\partial d}{\partial y}=e^{-xy}\left(2y-x^3-xy^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial d}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-xy}\left(2x-y^3-x^2y\right)\right)=e^{-xy}\left(y^4-4xy+x^2y^2+2\right)$$

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial d}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-xy}\left(2y-x^3-xy^2\right)\right)=e^{-xy}\left(xy^3-3y^2-3x^2+x^3y\right)$$

$$\frac{\partial^2 d}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial d}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-xy}\left(2y-x^3-xy^2\right)\right)=e^{-xy}\left(x^4-4xy+x^2y^2+2\right)$$

Cas de la fonction e :

$$\frac{\partial e}{\partial x}(x,y)=(\ln y)^2 \qquad \frac{\partial e}{\partial y}=2y+2\frac{x}{y}\ln y \qquad \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial e}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left((\ln y)^2\right)=0$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial e}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2y+2\frac{x}{y}\ln y\right)=\frac{2}{y}\ln y$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2y+2\frac{x}{y}\ln y\right)=2\frac{x}{y^2}-2\frac{x}{y^2}\ln y+2$$

Cas de la fonction f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y+2xy-x^2}{(x^2+y)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-x^2-x}{(x^2+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y+2xy-x^2}{(x^2+y)^2}\right)=\frac{2x^3-6xy+2y^2-6x^2y}{(x^2+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x^2-x}{(x^2+y)^2}\right)=\frac{3x^2-2xy-y+2x^3}{(x^2+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x^2-x}{(x^2+y)^2}\right)=\frac{2x^2+2x}{(x^2+y)^3}$$

correction de l'exercice 7

Pour commencer, on remarque que $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, ce qui implique que les extréma sont à chercher parmi les points critiques et, chacune des fonctions suivantes étant deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$, la nature de ces points critiques découle de la caractérisation par la règle du "$rt - s^2$".

$\boxed{\text{Cas de la fonction } a}$: Recherche des points critiques éventuels

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial a}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y & = & 0 \\ x+2y & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x & = & 0 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ 3y & = & 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction a possède un unique point critique qui est $(0,0)$.

Nature du point critique $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x+y) = 2 &&\Rightarrow r(0,0) = 2 \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x+2y) = 1 &&\Rightarrow s(0,0) = 1 \\ \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x+2y) = 2 &&\Rightarrow t(0,0) = 2 \end{aligned}$$

Il est alors immédiat que $(rt - s^2)(0,0) = 2^2 - 1^2 = 3 > 0$ et comme $r(0,0) = 2 > 0$, on en déduit que le point critique $(0,0)$ est un minimum local de la fonction a. Ce minimum vaut $a(0,0) = 0$ autrement dit, la fonction a est positive au voisinage du point $(0,0)$.

$\boxed{\text{Cas de la fonction } b}$: Recherche des points critiques éventuels

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial b}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y-6 & = & 0 \\ 2x+4y-6 & = & 0 \end{cases} \underset{\times(1/2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+y & = & 3 \\ x+2y & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x & = & 3 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ 3y & = & 3 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction b possède un unique point critique qui est $(1,1)$.

Nature du point critique $(1,1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(4x+2y-6) = 4 &&\Rightarrow r(1,1) = 4 \\ \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x+4y-6) = 2 &&\Rightarrow s(1,1) = 2 \\ \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x+4y-6) = 4 &&\Rightarrow t(1,1) = 4 \end{aligned}$$

Il est alors immédiat que $(rt - s^2)(1,1) = 4^2 - 2^2 = 12 > 0$ et comme $r(1,1) = 4 > 0$, on en déduit que le point critique $(1,1)$ est un minimum local de la fonction a. Ce minimum vaut $a(1,1) = 3$ autrement dit, la fonction a est supérieure à 3 au voisinage du point $(1,1)$.

$\boxed{\text{Cas de la fonction } c}$: Recherche des points critiques éventuels

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial c}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-3x^2 & = & 0 \\ 3x-3y^2 & = & 0 \end{cases} \underset{\times(1/3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y & = & x^2 \\ x & = & y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (y^2)^2 = y^4 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-y^3) = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y^3 = 1 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0^2 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 \\ x = 1^2 = 1 \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction c possède deux points critiques qui sont $(0,0)$ et $(1,1)$.

Nature des points critiques :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3y-3x^2\right) = -6x \quad \Rightarrow r(0,0)=0 \text{ et } r(1,1)=-6\\
\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x-3y^2\right) = 3 \quad \Rightarrow s(0,0)=3 \text{ et } r(1,1)=3\\
\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x-3y^2\right) = -6y \quad \Rightarrow t(0,0)=0 \text{ et } t(1,1)=-6
\end{aligned}$$

Il est alors immédiat que

$$\begin{aligned}
(rt-s^2)(0,0) &= 0^2-3^2=-9<0\\
(rt-s^2)(1,1) &= (-6)^2-3^2=27>0 \text{ et } r(1,1)=-6<0
\end{aligned}$$

On en déduit que le point critique $(0,0)$ n'est pas un extrémum de c et que le point critique $(1,1)$ est un maximum local pour c. Ce minimum vaut $c(1,1)=1$, donc la fonction c est supérieure à 1 au voisinage du point $(1,1)$.

$\boxed{\text{Cas de la fonction } d}$: Recherche des points critiques éventuels

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial x}(x,y) = 0\\ \frac{\partial d}{\partial y}(x,y) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3y^2-15 = 0\\ 6xy-12 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 5 & \times(1/3)\\ xy = 2 & \times(1/6)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5\\ y = \frac{2}{x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^4+4}{x^2} = 5\\ y = \frac{2}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+4 = 5x^2\\ y = \frac{2}{x}\end{cases} \underset{X=x^2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} X^2-5X+4 = 0\\ y = \frac{2}{x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=1 \text{ ou } X=4\\ y = \frac{2}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \text{ ou } x^2=4\\ y = \frac{2}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=-2 \text{ ou } x=2\\ y=\frac{2}{x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1\\ y=\frac{2}{-1}=-2\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=1\\ y=\frac{2}{1}=2\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-2\\ y=\frac{2}{-2}=-1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=2\\ y=\frac{2}{2}=1\end{cases}$$

Par conséquent, la fonction c possède quatre points critiques qui sont $(-1,-2)$, $(1,2)$, $(-2,-1)$ et $(2,1)$.

Nature des points critiques :

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial d}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2+3y^2-15\right) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial d}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6xy-12) = 6y \qquad \frac{\partial^2 d}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial d}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(6xy-12) = 6x$$

$$\Rightarrow \begin{array}{llll}
r(-1,-2)=-6 & s(-1,-2)=-12 & t(-1,-2)=-6 & (rt-s^2)(-1,-2)=-108<0\\
r(1,2)=6 & s(1,2)=12 & t(1,2)=6 & (rt-s^2)(1,2)=-108<0\\
r(-2,-1)=-12 & s(-2,-1)=-6 & t(-2,-1)=-12 & (rt-s^2)(-2,-1)=108>0\\
r(2,1)=12 & s(2,1)=6 & t(2,1)=12 & (rt-s^2)(2,1)=108>0
\end{array}$$

On en déduit que

- les points critiques $(-1,-2)$ et $(1,2)$ ne sont pas des extréma de d,
- le point critique $(-2,-1)$ est un maximum local pour d et comme $d(-2,-1)=28$, la fonction d est inférieure à 28 au voisinage du point $(-2,-1)$
- le point critique $(2,1)$ est un minimum local pour d et comme $d(2,1)=-28$, la fonction d est supérieure à -28 au voisinage du point $(2,1)$

correction de l'exercice 8

Chacune des fonctions suivantes est deux fois différentiables sur chaque ouvert considéré.

1. Recherche des points critiques :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial a}{\partial x}(x,y) & = & 0\\ \dfrac{\partial a}{\partial y}(x,y) & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}1[(\ln x)^2+y^2]+x\left[2\times\dfrac{1}{x}(\ln x)\right] & = & 0\\ x[2y] & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}(\ln x)^2+y^2+2(\ln x) & = & 0\\ 2xy & = & 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\underbrace{x=0}_{\text{impossible car } x>0} \quad \text{ou } y=0\\ (\ln x)^2+y^2+2(\ln x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=0\\ (\ln x)^2+2(\ln x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=0\\ (\ln x)\,[\ln x+2]=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=0\\ (\ln x)=0 \text{ ou } \ln x+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=0\\ x=e^0=1 \text{ ou } x=e^{-2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=0\\ x=1\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}y=0\\ x=e^{-2}\end{array}\right.$$

Par conséquent, la fonction a possède deux points critiques qui sont $(1,0)$ et $(e^{-2},0)$.
Nature des points critiques :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left((\ln x)^2+y^2+2(\ln x)\right)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x+\frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2xy)=2y \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x$$

$$\Rightarrow \begin{array}{llll}r(1,0)=2 & s(1,0)=0 & t(1,0)=2 & (rt-s^2)(1,0)=4>0\\ r(e^{-2},0)=-4e^2 & r(e^{-2},0)=0 & t(e^{-2},0)=2e^{-2} & (rt-s^2)(1,2)=-8<0\end{array}$$

Par conséquent, le point $(e^{-2},0)$ n'est pas un extrémum pour la fonction a et le point $(1,0)$ est un minimum local $(r>0)$ pour la fonction a. Puisque $a(1,0)=0$, on en déduit que la fonction a est positive au voisinage du point $(1,0)$. En fait, puisque x est strictement positif, l'expression de a montre que cette fonction est positive sur $\mathbb{R}_+^\times\times\mathbb{R}$ tout entier.

2. Recherche des points critiques :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial b}{\partial x}(x,y) & = & 0\\ \dfrac{\partial b}{\partial y}(x,y) & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}2xy & = & 0\\ x^2+\dfrac{2y}{y^2+1} & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=0 \text{ ou } y=0\\ x^2+\dfrac{2y}{y^2+1}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=0\\ \dfrac{2y}{y^2+1}=0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}y=0\\ x^2=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}y=0\\ x=0\end{array}\right.$$

Par conséquent, la fonction b possède un unique point critique qui est $(1,0)$.
Nature des points critiques :

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2xy)=2y \qquad \frac{\partial^2 b}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+\frac{2y}{y^2+1}\right)=2x$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+\frac{2y}{y^2+1}\right)=\frac{2(y^2+1)-2y(2y)}{(y^2+1)^2}=\frac{2-2y^2}{(y^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad r(0,0)=0 \quad s(0,0)=0 \quad t(0,0)=2 \quad (rt-s^2)(0,0)=0$$

Par conséquent, le point $(0,0)$ n'est pas un extrémum de la fonction b.

3. Recherche des points critiques :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial c}{\partial x}(x,y) & = & 0\\ \dfrac{\partial c}{\partial y}(x,y) & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}1[e^{-(x^2+y^2)}]+x\left[-2xe^{-(x^2+y^2)}\right] & = & 0\\ -2xye^{-(x^2+y^2)} & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}e^{-(x^2+y^2)}\left[1-2x^2\right] & = & 0\\ 2xye^{-(x^2+y^2)} & = & 0\end{array}\right.$$

$$\underset{\exp(u)\neq 0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl}1-2x^2 & = & 0\\ xy & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2=\dfrac{1}{2}\\ x=0 \text{ ou } y=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2=\dfrac{1}{2}\\ x=0 \text{ (impossible car } x^2\neq 0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}x^2=\dfrac{1}{2}\\ y=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\sqrt{\dfrac{1}{2}} \text{ ou } -\sqrt{\dfrac{1}{2}}\\ y=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\\ y=0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}x-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\\ y=0\end{array}\right.$$

Par conséquent, la fonction a possède deux points critiques qui sont $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)$ et $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)$.

Nature des points critiques :

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-(x^2+y^2)}\left[1-2x^2\right]\right)=-2xe^{-(x^2+y^2)}\left[1-2x^2\right]+e^{-(x^2+y^2)}\left[-4x\right]$$

$$=-2xe^{-x^2-y^2}\left(3-2x^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-2xye^{-(x^2+y^2)}\right)=-2ye^{-(x^2+y^2)}+4x^2ye^{-(x^2+y^2)}=-2y\left(e^{-x^2-y^2}\right)\left(1-2x^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-2xye^{-(x^2+y^2)}\right)=-2xe^{-(x^2+y^2)}+4xy^2e^{-(x^2+y^2)}=-2x\left(e^{-x^2-y^2}\right)\left(1-2y^2\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{llll} r\left(\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)=-4\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-1/2} & s\left(\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)=0 & t\left(\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)=-2\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-1/2} & (rt-s^2)\left(\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)=4e^{-1}>0 \\ r\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)=4\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-1/2} & r\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)=0 & t\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-1/2} & (rt-s^2)\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)=4e^{-1}>0 \end{array}$$

On en déduit que le point $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)$ est un maximum local pour c ($r<0$) et que le point $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)$ est un minimum local pour c ($r>0$). Etant donné que $c\left(\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-1/2}$ (resp. $c\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)=-\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-1/2}$) on est assuré que la fonction c est inférieure (resp. supérieure) ou égale à $\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-1/2}$ (resp. $-\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-1/2}$) au voisinage du point $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)$ (resp. $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)$).